

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

# **Aplikace ohodnocení grafů**

## **Graph labelings and their applications**

## Zadání bakalářské práce

Student:

**Valdemar Ziętek**

Studijní program:

B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103R031 Výpočetní matematika

Téma:

Aplikace ohodnocení grafů  
Graph labelings and their applications

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

Cílem bakalářské práce kompilačního charakteru je zpracování přehledu různých aplikací ohodnocení grafů. V podsedních dvou dekadách vychází desítky, možná stovky, článků zaměřených na různá ohodnocení grafů. J. Gallian ve svém každoročně aktualizovaném přehledovém článku eviduje již téměř 2500 článků na téma ohodnocení grafů.

Ne každé studované ohodnocení nachází uplatnění v praktických aplikacích. Práce by se měla zaměřit na vyhledání zajímavých využití různých ohodnocení (magických, graciózních, radiových ohodnocení, či barvení grafů). Práce přehledně shrne vlastnosti a základní poznatky pro různá ohodnocení, těžištěm každé části budou ukázky praktického využití, preferovány budou překvapivé výsledky.

Práci lze shrnout do následujících okruhů:

- Přehled společné terminologie včetně historického úvodu
- Vybraná ohodnocení rozdělená do kapitol dle typu
- Ukázky aplikací všech vybraných ohodnocení

Jednotlivé kapitoly mohou být doplněny přehledem aktuálních otevřených problémů v dané oblasti.

Seznam doporučené odborné literatury:

Literatura:

- \* D.B. West, Introduction to graph theory - 2nd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, (2001), ISBN 0-13-014400-2.
- \* J. Matoušek, J. Nešetřil, An Invitation to Discrete Mathematics, 2nd Edition, Oxford University Press (2008), ISBN-10: 0198570422, ISBN-13: 978-0198570424.
- \* J. Gallian, JA Dynamic Survey of Graph Labeling - The Electronic Journal of Combinatorics, (2017).
- \* další články dle pokynů vedoucího práce

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Tereza Kovářová, Ph.D.**

Datum odevzdání: 30.04.2019

215 Bunde

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



*[Signature]*

prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 30. dubna 2019

  
.....

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucí práce paní Mgr. Tereze Kovářové, Ph.D. za připomínky, ochotu, pomoc, cenné rady a čas, který mi při psaní této práce věnovala.

Také bych rád poděkoval mým rodičům a sourozencům, kteří mě při studiu a psaní této práce plně podporovali.

## Abstrakt

Tato práce se zabývá aplikacemi ohodnocení grafů. Existují stovky článků o různých typech ohodnocení grafů. Mnoho odkazů na tyto články je evidováno v přehledovém článku J. A. Galliana. Tento text se zabývá pouze zlomkem všech různých publikovaných výsledků. Úkolem bylo najít zajímavé aplikace vybraných ohodnocení grafů. Práce se zabývá především graciózním, distančně magickým a antimagickým, hendikepovým a rádiovým ohodnocením. Pro každý ze zmíněných typů ohodnocení je uvedena definice, některé známé (základní, zajímavé) výsledky a možné aplikace. Aplikace se týkají rozkladů grafů, konstrukcí perfektního systému diferenčních množin, souvislosti s Golombovým pravítkem, využití magických ohodnocení pro sestavování neúplných sportovních turnajů či přiřazování frekvencí v bezdrátových sítích.

**Klíčová slova:** graf, ohodnocení grafu, graciózní ohodnocení, magické ohodnocení, rádiové ohodnocení, rádiové pulsní kódování, perfektní systém diferenčních množin, Golombovo pravítko

## Abstract

Thesis deals with applications of graph labelings. There exist hundreds of papers on various types of graph labelings, and most of them are cited in A Dynamic Survey of Graph Labeling of J. A. Gallian. This thesis surveys only a fraction of all known results. The aim is to summarize interesting applications for selected graph labelings. Thesis is especially focused on graceful, distance-magic and distance-antimagic, handicap and radio labelings of graphs. For every mentioned type of a graph labeling the definition is presented along with known (basic, interesting) results and possible applications. Described applications are applications to graph decompositions, to constructions of perfect system of difference sets and the correspondence with Golomb ruler is explained. Also applications of magic type labelings to scheduling of incomplete sport tournaments and application of radio labeling to assigning frequencies in wireless networks are presented.

**Key Words:** graph, graph labeling, graceful labeling, magic labeling, radio labeling, radio pulse coding, perfect system of difference sets, Golomb ruler

# Obsah

<b>Seznam použitých zkratek a symbolů</b>	<b>8</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>9</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>11</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>12</b>
<b>2 Základní pojmy</b>	<b>13</b>
2.1 Základní třídy jednoduchých grafů . . . . .	14
2.2 Vzdálenosti v grafu . . . . .	19
2.3 Ohodnocení grafů . . . . .	20
<b>3 Graciózní ohodnocení</b>	<b>21</b>
3.1 Definice graciózních ohodnocení . . . . .	21
3.2 Vybrané výsledky o graciózních ohodnoceních grafů . . . . .	22
3.3 Aplikace . . . . .	22
<b>4 Magická ohodnocení</b>	<b>33</b>
4.1 Definice některých ohodnocení magického typu . . . . .	33
4.2 Známé výsledky týkající se distančně magických, antimagických a hendikepových ohodnocení . . . . .	35
4.3 Aplikace . . . . .	37
<b>5 Rádiové ohodnocení</b>	<b>42</b>
5.1 Definice rádiových ohodnocení . . . . .	42
5.2 Známé výsledky o rádiovém ohodnocení . . . . .	43
5.3 Aplikace . . . . .	46
<b>6 Závěr</b>	<b>50</b>
<b>Literatura</b>	<b>51</b>

## Seznam použitých zkratek a symbolů

$C_n$	– Cyklus na $n$ vrcholech
$EIT$	– Equalized incomplete tournament
$FIT$	– Fait incomplete tournament
$G(V, E)$	– Graf $G$ s množinou vrcholů $V$ a množinou hran $E$
$GPS$	– Global Positioning System
$\overline{G}$	– Doplněk grafu $G$
$HIT$	– Handicap incomplete tournament
$K_{m,n}$	– Úplný bipartitní graf, kde $m$ a $n$ odpovídá počtu vrcholů jednotlivých partit
$K_n$	– Úplný graf na $n$ vrcholech
$K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$	– Úplný multipartitní graf, kde $n_1, n_2, \dots, n_r$ odpovídá počtu vrcholů jednotlivých partit 1 až $r$
$N(x)$	– Množina vrcholů sousedních k vrcholu $x$
$P_n$	– Cesta na $n$ vrcholech
$PSDS$	– Perfect system of difference sets
$S_n$	– Hvězda na $n + 1$ vrcholech
$T$	– Strom $T$
$W_n$	– Kolový graf na $n + 1$ vrcholech
$diam(G)$	– Diametr grafu $G$
$ecc_G(v)$	– Excentricita vrcholu $v$ v grafu $G$
$mK_n$	– Windmill graf složený z $m$ kopií úplného grafu $K_n$
$rn(G)$	– Rádiové číslo grafu $G$
$w(x)$	– Váha vrcholu $x$
$\Delta(G)$	– Největší stupeň vrcholu grafu $G$
$\delta(G)$	– Nejmenší stupeň vrcholu grafu $G$



## Seznam obrázků

1	Jednoduchý graf. . . . .	13
2	Příklad grafu $G(V,E)$ , kde $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ a $E(G) = \{\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_2, v_3\}\}$ . . . . .	13
3	Orientovaný graf. . . . .	14
4	Kompletní graf $K_6$ . . . . .	15
5	Příklad cesty $P_5$ . . . . .	15
6	Příklad cyklu (kružnice) $C_6$ . . . . .	15
7	Příklad kolového grafu $W_8$ . . . . .	16
8	Příklad stromu na 6-ti vrcholech. . . . .	16
9	Příklad úplného bipartitního grafu $K_{3,4}$ . . . . .	17
10	Příklad multipartitního grafu $K_{3,3,3}$ . . . . .	17
11	Příklad housenky. . . . .	18
12	Příklad <i>Holandského 3-windmill grafu</i> $3K_3$ . . . . .	18
13	Příklad <i>Francouzského 4-windmill grafu</i> $4K_4$ . . . . .	18
14	Graf $G$ a jeho doplněk $\overline{G}$ . . . . .	19
15	Příklad 3-pravidelného grafu. . . . .	19
16	Graf s vyznačenými excentricitami vrcholů a diametrem velikosti 5. . . . .	20
17	Příklady graciózního ohodnocení. . . . .	21
18	Příklad $\alpha$ -ohodnocení $K_{2,3}$ grafu. . . . .	22
19	Příklad rozkladu grafu $G$ na různé podgrafy $H_1, H_2$ a $H_3$ . . . . .	23
20	Rozklad grafu $G$ na kopie $K_3$ . . . . .	23
21	Cyklický rozklad grafu $K_9$ na 9 kopií grafu $T$ s graciózním ohodnocením. . . . .	24
22	Cyklický rozklad $K_9$ na kopie $C_4$ . . . . .	25
23	PSDS $(1, 3, 1)$ a $(1, 4, 1)$ . . . . .	26
24	Graciózní ohodnocení grafů $K_3$ a $K_4$ . . . . .	26
25	Příklady graciózního ohodnocení <i>Francouzského 4-windmill</i> a <i>Holandského 5-windmill grafu</i> . . . . .	27
26	PSDS $(4, 4, 1)$ odpovídající gracióznímu ohodnocení <i>Francouzského 4-windmill grafu</i> . . . . .	27
27	PSDS $(5, 3, 1)$ odpovídající gracióznímu ohodnocení <i>Holandského 5-windmill grafu</i> . . . . .	27
28	PSDS $(3, 3, 2)$ . . . . .	28
29	Graciózní ohodnocení <i>Holandského 3-windmill grafu</i> . . . . .	28
30	PSDS $(3, 3, 2)$ . . . . .	28
31	3-graciózní ohodnocení $\Delta_3$ -hada. . . . .	28
32	Model pravítka odpovídající grafu $K_4$ s graciózním ohodnocením. . . . .	29
33	Ohodnocení $K_5$ s $\theta(K_5) = 11$ . . . . .	29
34	Pravítko odpovídající ohodnocení úplného grafu $K_5$ . . . . .	29

35	Korelace řady radarových kódových pulsů s obrazem sebe sama. Moment, kdy vracející se pulsní řada rozmístění pravítka je zarovnána se svojí šablonou. . . . .	31
36	Autokorelační funkce pro vracející se řadu pulsů. . . . .	31
37	Bipartitní graf $K_{3,3}$ a jemu odpovídající semi-magický čtverec $3 \times 3$ s magickou konstantou 15. . . . .	33
38	Příklad distančně magického ohodnocení s magickou konstantou 22. . . . .	34
39	Příklad distančně antimagického ohodnocení (váhy vrcholů tvořící aritmetickou posloupnost jsou vyznačeny větším fontem). . . . .	35
40	Příklad hendikepového ohodnocení grafu, kde $\mu = 9$ . . . . .	35
41	Cesta $P_3$ , cyklus $C_4$ a kolový graf $W_4$ s distančně magickým ohodnocením. . . . .	36
42	Graf $K_{12}$ modelující úplný turnaj 12 týmů. . . . .	37
43	Graf neúplného turnaje odpovídající rozpisu zápasů pro FIT(12,5). . . . .	38
44	Graf neúplného turnaje odpovídající rozpisu zápasů pro EIT(12,6). . . . .	40
45	Graf neúplného turnaje odpovídající rozpisu zápasů pro HIT(12,5). . . . .	41
46	Příklad rádiového ohodnocení obecného grafu $G$ . . . . .	43
47	Příklady rádiových ohodnocení úplných grafů $K_n$ pro $2 \leq n \leq 7$ . . . . .	43
48	Příklady rádiových ohodnocení hvězd $S_n$ pro $2 \leq n \leq 6$ . . . . .	44
49	Příklady rádiových ohodnocení kolových grafů $W_n$ pro $3 \leq n \leq 8$ . . . . .	45
50	Příklady rádiových ohodnocení úplných bipartitních grafů $K_{3,2}$ a $K_{2,5}$ . . . . .	45
51	Interpretace grafu typu cesta - rádiový přenos. . . . .	47
52	Interpretace grafu typu cesta - v teorii grafů. . . . .	47
53	Tabulka cesty pro 1000 vysílání. . . . .	47
54	Cesta pro 1000 vysílání. . . . .	48
55	Reprezentace v teorii grafů a simulační reprezentace. . . . .	49

## Seznam tabulek

1	Golombova pravítka pro $2 \leq n \leq 10$ . . . . .	30
2	Rozpis spravedlivého neúplného turnaje (FIT) pro 12 týmů o 5 kolech. . . . .	38
3	Rozpis vyrovnaného neúplného turnaje (EIT) pro 12 týmů o 6 kolech. . . . .	39
4	Rozpis hendikepového neúplného turnaje s 5 koly pro 12 týmů. . . . .	41

# 1 Úvod

Tato práce se zabývá aplikacemi grafových ohodnocení při řešení problémů z různých oblastí matematiky nebo i v praxi. V některé literatuře se uvádí anglický pojem *labeling*, v tomto textu je použit český název *ohodnocení*. Ohodnocením grafu může být očíslování vrcholů, hran nebo nejčastěji obojího obvykle nezápornými celými čísly, kdy jsou stanoveny nějaké podmínky pro dané ohodnocení. Mnoho informací o ohodnocení grafů lze získat z každoročně aktualizovaného přehledového článku od J. Galliana [2] o grafových ohodnoceních s několika stovkami odkazů na danou literaturu. Tato práce si neklade za cíl vypsát všechny druhy ohodnocení a jejich výsledky a aplikace. Zabývá se pouze několika druhy grafových ohodnocení, a to graciózními, distančně magickými a antimagickými, hendikepovými a rádiovými. Pro všechna ohodnocení jsou uvedeny definice, některé známé výsledky a některé aplikace. Vše je doplněno příklady a obrázky.

Začátek této práce tvoří kapitola o základních grafových pojmech a základních třídách grafů, které jsou použity v dalších částech práce.

Třetí kapitola je věnována *graciózním* ohodnocením. Při sestavování ohodnocení graciózního typu je cílem ohodnotit vrcholy grafu tak, aby odvozené ohodnocení hran tvořilo aritmetickou posloupnost začínající od 1 s diferencí 1. Vrcholy se většinou číslují od 0 až po  $2m$ , kde  $m$  je počet hran daného grafu. V současnosti jsou známy například některé nekonečné třídy stromů, které jsou graciózní a také je známo, že všechny stromy s 35 vrcholy a méně jsou graciózní.

Hlavní aplikace graciózních ohodnocení, které jsou popsány v kapitole 3, jsou rozklady grafů na základě existence graciózního typu ohodnocení. Dále jsou zmíněny v souvislosti s graciózním ohodnocením *perfektní systém diferenčních množin* a *Golombovo pravítko*. Je popsána souvislost úplného grafu s graciózním ohodnocením a Golombova pravítka a možné aplikace Golombova pravítka v radarové technice.

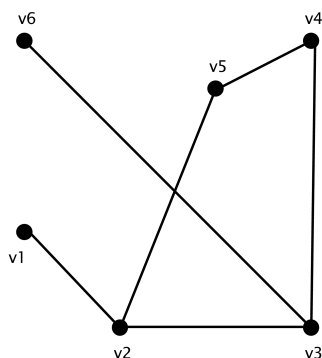
V kapitole o *magických* ohodnoceních jsou definovány některé typy magických ohodnocení, a to *distančně magické*, *distančně  $d$ -antimagické* a *hendikepové* ohodnocení. Definice jsou doplněny příklady. Jako aplikace těchto ohodnocení je zmíněn *neúplný turnaj*. Práce popisuje použití ohodnocení magického typu k sestavení následujících neúplných turnajů. Jsou to *spravedlivý neúplný turnaj* (FIT - „fair incomplete tournament“), *vyrovnaný neúplný turnaj* (EIT - „equalized incomplete tournament“) a *hendikepový neúplný turnaj* (HIT - „handicap incomplete tournament“).

Poslední kapitola je věnována rádiovým ohodnocením. Rádiová ohodnocení grafu souvisí s měřením vzdáleností v grafu a proto část kapitoly o rádiových ohodnoceních je věnována pojmům souvisejícím se vzdálenostmi v grafech a očíslováním grafů. Jako aplikace je popsána simulace rádiových ohodnocení v rádiových sítích.

## 2 Základní pojmy

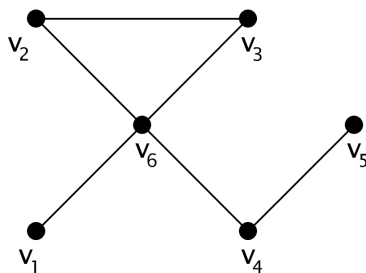
Pro začátek zavedeme některé základní pojmy z teorie grafů. Například pojem grafu. Pod tímto názvem v diskrétní matematice nerozumíme graf funkce, ale strukturu, která zahrnuje objekty (vrcholy) a vztahy mezi nimi (hrany).

**Definice 1 (Jednoduchý graf)** *Jednoduchý graf  $G$  je uspořádaná dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  je neprázdná množina vrcholů a  $E$  je nějaká množina dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ . Prvkům množiny  $E$  říkáme hrany.*



Obrázek 1: Jednoduchý graf.

Množinu všech vrcholů grafu  $G$  budeme značit  $V(G)$  a množinu všech hran grafu  $G$  značíme  $E(G)$ . Prvky množiny  $V$  budeme značit malými písmeny, například vrchol  $v_1$  nebo vrchol  $x$ . Prvky množiny  $E$  budeme značit  $\{v_1, v_2\}$  nebo zjednodušeným zápisem  $v_1v_2$ .



Obrázek 2: Příklad grafu  $G(V, E)$ , kde  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$  a  $E(G) = \{\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_2, v_3\}\}$ .

Na obrázku 2 je příklad grafu  $G$ , který má množinu vrcholů  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  a množinu hran  $E(G) = \{v_1v_6, v_2v_6, v_3v_6, v_4v_6, v_4v_5, v_2v_3\}$ . Těmito dvěma množinami je graf  $G$  určen úplně.

Jestliže hrana  $uv \in E(G)$ , říkáme, že vrcholy  $u$  a  $v$  jsou incidentní s hranou  $uv$ . Jinak říkáme, že vrcholy  $u$  a  $v$  jsou spojené *hranou*  $uv$ , nebo že jsou sousední v grafu  $G$ . Zavedeme pojem stupeň vrcholu.

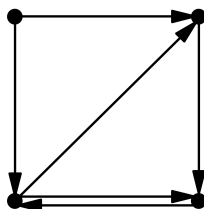
**Definice 2 (Stupeň vrcholu grafu)** *Stupeň vrcholu  $v$  je počet hran, s kterými je vrchol  $v$  incidentní, a značí se  $\deg(v)$ .*

Pro příklad určíme stupeň vrcholu  $v_6$  z obrázku 2. Zřejmě  $\deg(v_6) = 4$ . Pojem izolovaný vrchol  $v$  znamená, že  $\deg(v) = 0$ . Pokud množina  $E$  hranu  $uv$  neobsahuje, tak vrcholy  $u$  a  $v$  jsou *nesousední*, neboli *nezávislé*.

Pojem jednoduchého grafu můžeme zobecnit na graf, kdy budeme rozlišovat hrany  $uv$  a  $vu$ , což se nám může v některých případech hodit. Takovýto graf se nazývá *orientovaný graf*. Hrany, kdy koncový a počáteční vrchol je stejný, se nazývají *smyčky*. Jestliže mezi hrany zahrneme i smyčky, budeme mít jako hrany jednoprvkové podmnožiny  $V(G)$ , tedy dostaneme *graf se smyčkami*, který můžeme vyjádřit jako  $G = (V', E')$  a  $E' \subseteq E(G) \cup V(G)$ ,  $V'(G) = V(G)$ . Další obecnější pojem než jednoduchý graf je *multigraf*, kdy umožníme, aby dva vrcholy byly spojeny i více než jednou hranou. Pojmem *pseudograf* rozumíme *multigraf se smyčkami*. Dále *obecným grafem* rozumíme graf s orientovanými i neorientovanými hranami a smyčkami (viz definice 3).

**Definice 3 (Obecný graf)** *Obecný graf je trojice  $(V, E, \varphi)$ , kde  $V$  je neprázdная množina vrcholů,  $E$  je množina hran,  $E \cap V = \emptyset$ , a  $\varphi$  je incidentní zobrazení  $\varphi : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup V^2 \cup V$ .*

Příklad orientovaného grafu je na obrázku 3.



Obrázek 3: Orientovaný graf.

V dalším textu, pokud nebude řečeno jinak, se budeme zabývat pouze jednoduchými grafy. Zavedeme pojmy základních tříd jednoduchých grafů.

## 2.1 Základní třídy jednoduchých grafů

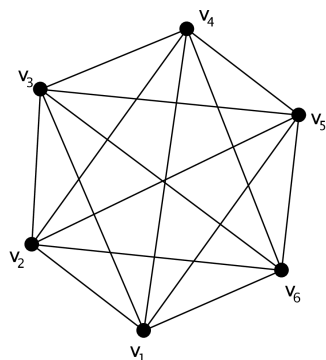
Jednou ze základních tříd grafů jsou *kompletní grafy*.

**Definice 4 (Úplný (kompletní) graf)** *Graf na  $n$  vrcholech, kde  $n \in \mathbb{N}$ , který obsahuje všech  $\binom{n}{2}$  možných hran, se nazývá úplný nebo také kompletní graf a značí se  $K_n$ .*

Symbolicky můžeme kompletní graf  $K_n$  popsat následovně.

$$K_n = (V, E) : \quad V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad E = \{v_i v_j : i, j = 1, 2, \dots, n \wedge i \neq j\}$$

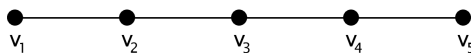
Příklad kompletního grafu na 6-ti vrcholech je na obrázku 4.



Obrázek 4: Kompletní graf  $K_6$ .

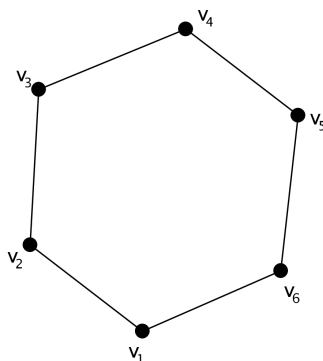
Další pro nás zajímavé grafy jsou cesta, cyklus (kružnice), kolový graf a strom.

**Definice 5 (Cesta)** Graf s množinou  $n$  vrcholů  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  a s množinou hran  $E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\}$  se nazývá cesta na  $n$  vrcholech a značí se  $P_n$  (viz obrázek 5).



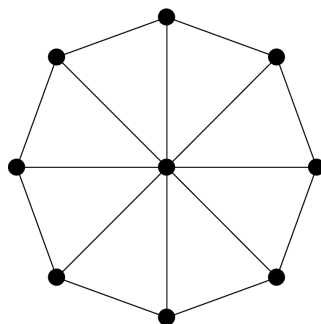
Obrázek 5: Příklad cesty  $P_5$ .

**Definice 6 (Cyklus (kružnice))** Graf s množinou  $n$  vrcholů  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  (kde  $n \geq 3$ ) a s množinou hran  $E = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$  nazýváme cyklus nebo kružnice a značíme  $C_n$ . Číslo  $n$  je délka cyklu  $C_n$  (viz obrázek 6).



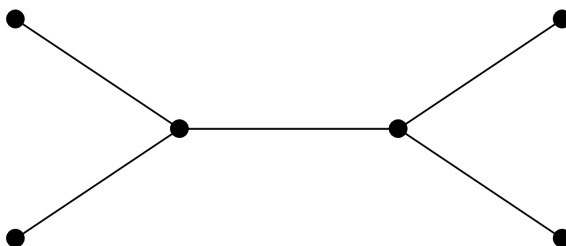
Obrázek 6: Příklad cyklu (kružnice)  $C_6$ .

**Definice 7 (Kolový graf)** *Kolový graf je graf složený z vrcholu uprostřed cyklu, který je spojený se všemi  $n$  vrcholy tohoto cyklu. Označuje se  $W_n$  (viz obrázek 7).*



Obrázek 7: Příklad kolového grafu  $W_8$ .

**Definice 8 (Strom)** *Strom je souvislý graf, který neobsahuje cyklus (viz obrázek 8).*



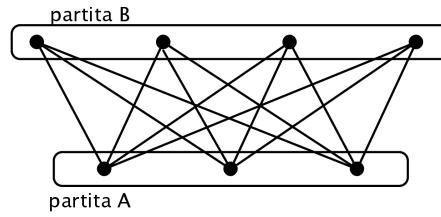
Obrázek 8: Příklad stromu na 6-ti vrcholech.

Definujeme pojem *Úplný bipartitní graf*, který využijeme v dalších částech této práce.

**Definice 9 (Úplný bipartitní graf)** *Bipartitní graf je takový graf, jehož množinu lze rozdělit na dvě části (partity), přičemž z každého vrcholu jedné partity jde hrana pouze do vrcholů druhé partity a naopak. Pokud jde z každého vrcholu jedné partity hrana do každého vrcholu druhé partity, mluvíme o úplném nebo také kompletním bipartitním grafu a značí se  $K_{m,n}$ , kde  $m$  a  $n$  odpovídá počtů vrcholů jednotlivých partit.*

Ukázka úplného bipartitního grafu viz obrázek 9.



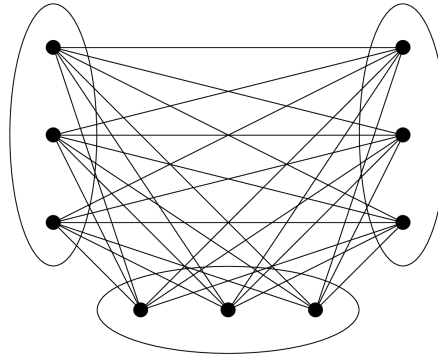


Obrázek 9: Příklad úplného bipartitního grafu  $K_{3,4}$ .

Úplný bipartitní graf je podmnožinou obecnějšího úplného multipartitního grafu. V úplném bipartitním grafu se nacházejí dvě partity, v úplném multipartitním grafu je to obecně  $r \geq 1$ . Zavedeme jeho definici (viz 10).

**Definice 10 (Úplný multipartitní graf)** [15] *Kompletní  $r$ -partitní graf  $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$  je graf, jehož vrcholová množina  $V$  se skládá z  $r$ , navzájem disjunktích neprázdných podmnožin  $V_i$ , kde  $r \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , a  $|V_i| = n_i$ . Hranová množina  $E$  obsahuje právě ty hrany, jejichž koncové vrcholy leží v různých množinách  $V_i$  a  $V_j$ , kde  $i \neq j$ . Každý podgraf  $(V, E')$ , kde  $E' \subseteq E$  úplného  $r$ -partitního grafu se nazývá  $r$ -partitní graf, případně multipartitní graf.*

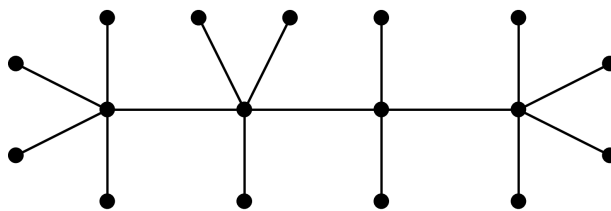
Příklad úplného multipartitního grafu  $K_{3,3,3}$  je na obrázku 10.



Obrázek 10: Příklad multipartitního grafu  $K_{3,3,3}$ .

**Definice 11 (Housenka)** [1] *Housenka je graf, který vznikne z cesty přidáním jakéhokoliv počtu listů (vrcholů) k této cestě. Jinak řečeno housenka je sekvencí hvězd  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_r$ , kde každá hvězda  $S_i$  má střed  $c_i$  a  $n_i$  listů,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Mezi listy  $S_i$  patří  $c_{i-1}$  a  $c_{i+1}$ , pro  $i = 2, \dots, r-1$ . Pokud  $r = 2$ , pak se tento graf nazývá dvojhvězda.*

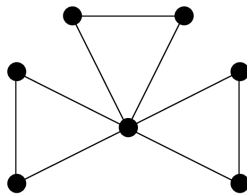
Příklad housenky viz obrázek 11.



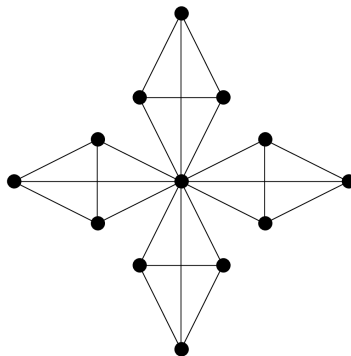
Obrázek 11: Příklad housenky.

Pro využití v aplikacích zavedeme ještě pojem *windmill* graf. Tady je definice:

**Definice 12 (Windmill graf)** [4] *Windmill graf  $mK_n$  s  $n \geq 3$  je graf složený z  $m$  kopií kompletního grafu  $K_n$ , které sdílejí vrchol (pro  $n = 2$  by se jednalo o hvězdu). Ve speciálním případě  $n = 3$ , tedy  $mK_3$ , se graf nazývá Holandský  $m$ -windmill graf. Graf  $mK_4$  se nazývá Francouzský  $m$ -windmill graf.*



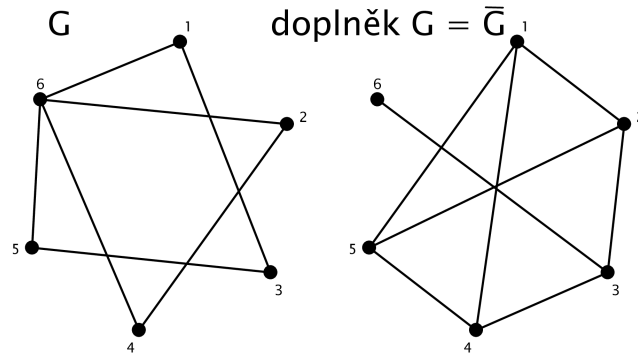
Obrázek 12: Příklad Holandského 3-windmill grafu  $3K_3$ .



Obrázek 13: Příklad Francouzského 4-windmill grafu  $4K_4$ .

Dále zavedeme pojem „doplňek grafu“, který využijeme později pro vysvětlení v kapitole magických ohodnocení.

**Definice 13 (Doplňek grafu)** [13] *Doplňek (komplement) grafu  $G$  je graf, značíme jej  $\overline{G}$ , se stejnou množinou vrcholů, mezi kterými jsou právě ty hrany, které v původním grafu  $G$  chybí. Tj.  $E(G) \cup E(\overline{G}) = E(K_n)$  a  $E(G) \cap E(\overline{G}) = \emptyset$  a  $V(G) = V(\overline{G}) = V(K_n)$ , viz obrázek 14.*

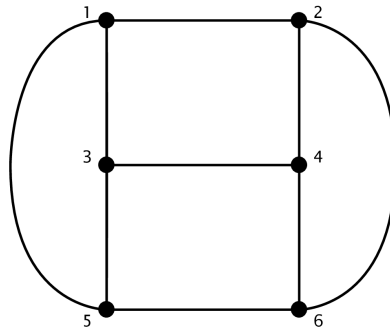


Obrázek 14: Graf  $G$  a jeho doplněk  $\overline{G}$ .

Zmíníme definici *regulárního grafu*, kterou využijeme opět v kapitole *magických ohodnocení*.

**Definice 14 (Regulární a  $r$ -regulární graf)** *Největší stupeň vrcholu grafu  $G$  je  $\Delta(G)$  a nejmenší je  $\delta(G)$ . Graf je regulární, když  $\Delta(G) = \delta(G)$ . Říkáme  $r$ -regulární, pokud  $\Delta(G) = \delta(G) = r$ , nebo česky  $r$ -pravidelný.*

Ukázka 3-pravidelného grafu viz obrázek 15.



Obrázek 15: Příklad 3-pravidelného grafu.

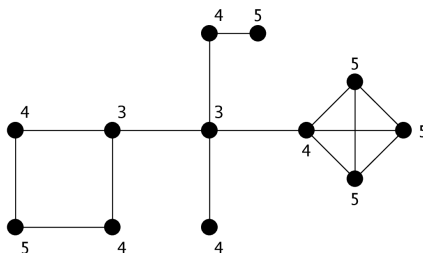
## 2.2 Vzdálenosti v grafu

Abychom mohli uvést nějaké další aplikace, budeme potřebovat definovat pojmy *excentricita* a *diametr* (viz [15]), které určují extrémní vzdálenosti v grafu. Vzdálenost mezi dvěma vrcholy  $u$  a  $v$  v grafu měříme jako délku nejkratší cesty mezi nimi a značíme  $d(u, v)$ .

**Definice 15 (Excentricita grafu)** *Mějme graf  $G$  a vrchol  $v \in V(G)$ . Excentricita vrcholu  $v$  je největší ze všech vzdáleností  $v$  od ostatních vrcholů v  $G$ . Excentricitu značíme  $\text{ecc}(v)$  nebo  $\text{ecc}_G(v)$ .*

Excentricitu vrcholu  $v$  můžeme popsat rovnicí  $\text{ecc}(v) = \max_{u \in V(G)} \{d(u, v)\}$ . Můžeme si povšimnout, že vrchol  $v$  je pevně daný, a maximum pro každý takový vrchol je určeno jednoznačně.

**Definice 16 (Diametr grafu  $G$ )** Největší *excentricita* v grafu  $G$  se nazývá *diametr grafu* a značí se  $diam(G)$ .



Obrázek 16: Graf s vyznačenými excentricitami vrcholů a diametrem velikosti 5.

Průměr grafu  $G$  můžeme popsat rovnicí  $diam(G) = \max_{v \in V(G)} \{ecc(v)\}$ . Takže excentricita je vlastností jednoho vrcholu grafu, a diametr je vlastností celého grafu.

## 2.3 Ohodnocení grafů

Ohodnocení grafu (viz [2]) je za určitých podmínek přiřazení celých čísel vrcholům, nebo hranám grafu, nebo obojímu. Nejčastěji se označují vrcholy i hrany (taková ohodnocení se nazývají „úplná ohodnocení“), nebo samotné vrcholy („vrcholová ohodnocení“), nebo samotné hrany („hranová ohodnocení“). Ohodnocení grafu bylo prvně představeno v polovině 60. let minulého století. V uplynulých 50 letech bylo zkoumáno přes 200 metod ohodnocení grafů ve více než 2500 odborných článcích, které jsou neustále aktualizovány. Toto je docela obtížné kvůli velkému počtu odborných článků, a protože mnoho článků se objevilo v časopisech, které nejsou široce dostupné.

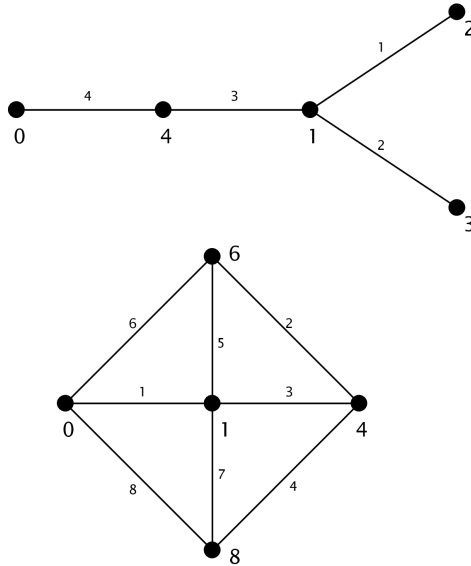
### 3 Graciózní ohodnocení

Mějme graf s  $m$  hranami a každý jeho vrchol označíme jedinečným číslem z množiny  $\{0, 1, \dots, m\}$ . Toto nazveme ohodnocením hrany. Pak přiřadíme každé hraně  $\{x, y\}$  jedinečné číslo z množiny  $\{1, \dots, m\}$  (budeme mu říkat délka hrany) a vypočteme jej jako menší z čísla  $|f(x) - f(y)|$  nebo rozdílu  $2m + 1$  a  $|f(x) - f(y)|$ , kde  $f$  je ohodnocením příslušného vrcholu.

Rosa nazval toto zobrazení  $f$   $\beta$ -ohodnocením, které následně Golomb [4] přejmenoval na *graciózní ohodnocení*. Jeho definici zmíníme níže.

#### 3.1 Definice graciózních ohodnocení

**Definice 17 ( $\rho$  a graciózní ohodnocení)** [5] *Bud'  $G$  grafem s  $m$  hranami a množinou vrcholů  $V(G)$  a necht'  $\lambda$  je prosté zobrazení  $\lambda : V(G) \rightarrow S$ , kde  $S$  je podmnožinou množiny  $\{0, 1, 2, \dots, 2m\}$ . Délka hrany  $\{x, y\}$  je definována jako  $l(\{x, y\}) = \min\{|\lambda(x) - \lambda(y)|, 2m + 1 - |\lambda(x) - \lambda(y)|\}$ . Pokud množina všech délek  $m$  hran je rovna  $\{1, 2, \dots, m\}$  a  $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 2m\}$ , pak  $\lambda$  je  $\rho$ -ohodnocení. Pokud  $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots, m\}$ , potom se  $\lambda$  nazývá graciózním ohodnocením (viz obrázek 17).*

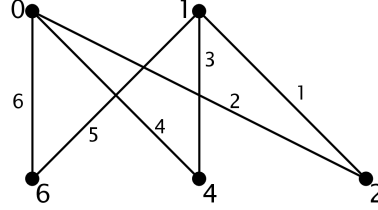


Obrázek 17: Příklady graciózního ohodnocení.

S existencí graciózního ohodnocení souvisí nedokázaná hypotéza od Gerharda Ringela a Antona Kotziga [2] z roku 1982, která říká, že všechny stromy jsou graciózní. Hypotéza je známá pod názvem „Graceful tree conjecture“ či „Ringel-Kotzig conjecture“, česky „Graciózní stromová hypotéza“ či „Ringel-Kotzigova hypotéza“.

Další ohodnocení, které také zavedl A. Rosa [6], a je speciálním typem graciózního ohodnocení, se nazývá  $\alpha$ -ohodnocení. Nutně pokud existuje  $\alpha$ -ohodnocení grafu, pak je tento graf bipartitní.

**Definice 18 ( $\alpha$ -ohodnocení)** Graciózní ohodnocení  $\lambda$  bipartitního grafu  $G$  s  $m$  hranami a partitami  $A$  a  $B$  je nazýváno  $\alpha$ -ohodnocením, pokud existuje takové celé číslo  $k$ , že  $\lambda(a) \leq k$   $\forall a \in A$  a  $\lambda(b) > k$ ,  $\forall b \in B$ .



Obrázek 18: Příklad  $\alpha$ -ohodnocení  $K_{2,3}$  grafu.

**Definice 19 ( $c$ -graciózní ohodnocení)**  $c$ -graciózní ohodnocení grafu  $G$  má množinu všech délek  $m$  hran danou  $\{c, c+1, \dots, m+c-1\}$ , množina vrcholů grafu  $G$  je podmnožinou množiny  $\{0, 1, \dots, 2m\}$ .

### 3.2 Vybrané výsledky o graciózních ohodnoceních grafů

Roku 1966 A. Rosa dokázal [3], že všechny housenkové grafy a kompletní bipartitní grafy a také  $4k$ -cykly pro všechna  $k \geq 1$  mají graciózní a také  $\alpha$ -ohodnocení.

Dále také dokázal [3], že všechny cykly  $C_n$  jsou graciózní právě tehdy, když  $n \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .

Je třeba poznamenat, že existují stovky článků s výsledky o graciózních ohodnoceních, viz [2]. Kvůli tak velkému množství nemůžeme v této práci všechny výsledky zmínit a ani to není cílem. Cílem je najít aplikace těchto ohodnocení.

Pro zajímavost zmíníme jeden z posledních výsledků o stromech. Roku 2010 v projektu Graceful Tree Verification Project [7] bylo zjištěno pomocí počítačových programů, že všechny stromy s nejvýše 35 vrcholy jsou graciózní.

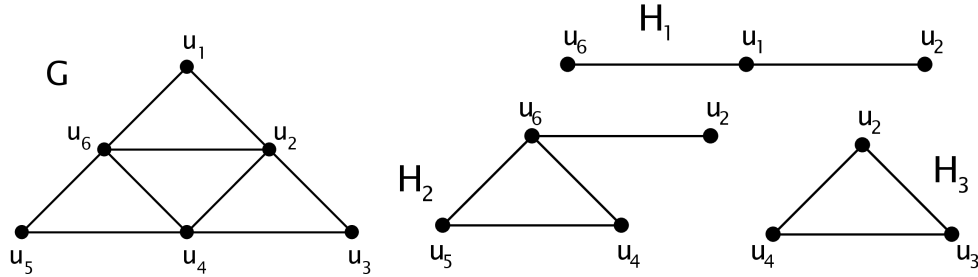
### 3.3 Aplikace

Dostávám se k tématu, které je hlavním cílem této práce. Jedná se o aplikace různých ohodnocení grafů. Jako první představím aplikaci graciózních ohodnocení grafů, která souvisí s rozkladem kompletních grafů. K tomu bude potřeba uvést definice pojmů souvisejících s rozklady.

#### 3.3.1 Rozklady

**Definice 20 (Rozklad grafu)** [6] Rozklad grafu  $G$  je systémem podgrafů  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$  takových, že každá hrana grafu  $G$  je obsažena přesně v jednom z podgrafů  $H_i$ . Graf  $G$  je hranově disjunktním sjednocením podgrafů  $H_i$ , pro  $i = 1, 2, \dots, t$ ,  $i \neq j$  a platí  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ ,  $E(G) = \bigcup_{i=1}^t E(H_i)$  a  $V(G) = \bigcup_{i=1}^t V(H_i)$ .

Například graf  $G$  můžeme rozložit na různé podgrafy (viz obrázek 19):  $E(H_1) = \{\{u_1, u_6\}, \{u_1, u_2\}\}$ ,  $E(H_2) = \{\{u_2, u_6\}, \{u_4, u_5\}, \{u_4, u_6\}, \{u_5, u_6\}\}$ ,  $E(H_3) = \{\{u_2, u_3\}, \{u_2, u_4\}, \{u_3, u_4\}\}$ . Rozklad  $G$  je systémem podgrafů  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3\}$  a platí, že  $E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(H_3) = E(G) \wedge (E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset) \wedge (E(H_1) \cap E(H_3) = \emptyset) \wedge (E(H_2) \cap E(H_3) = \emptyset)$

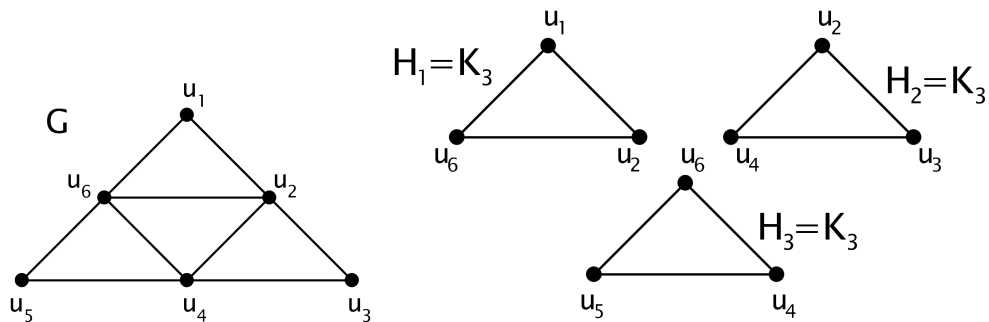


Obrázek 19: Příklad rozkladu grafu  $G$  na různé podgrafy  $H_1, H_2$  a  $H_3$ .

Dále potřebujeme uvést obdobnou definici týkající se rozkladu grafu  $G$  na stejné podgrafy.

**Definice 21 (H-rozklad grafu  $G$ )** [4] *Jsou-li dány dva grafy  $H$  a  $G$ , pak  $H$ -rozkladem grafu  $G$  rozumíme rozklad grafu  $G$  na podgrafy izomorfní ke grafu  $H$ . Tj. každý podgraf  $H_i$  (zmíněn v předešlé definici) musí být izomorfní s grafem  $H$ .*

Na obrázku 20 můžeme vidět příklad  $K_3$ -rozkladu grafu  $G$ , kterým je systém podgrafů  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3\}$ , kde  $H_1 = H_2 = H_3 = K_3$ :  $E(H_1) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_6\}, \{u_1, u_6\}\}$ ,  $E(H_2) = \{\{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}, \{u_2, u_4\}\}$  a  $E(H_3) = \{\{u_4, u_5\}, \{u_5, u_6\}, \{u_4, u_6\}\}$ .



Obrázek 20: Rozklad grafu  $G$  na kopie  $K_3$ .

Graciózní ohodnocení byla zavedena jako nástroj pro cyklické rozklady kompletních grafů. Proto uvedeme ještě i definici cyklického rozkladu.

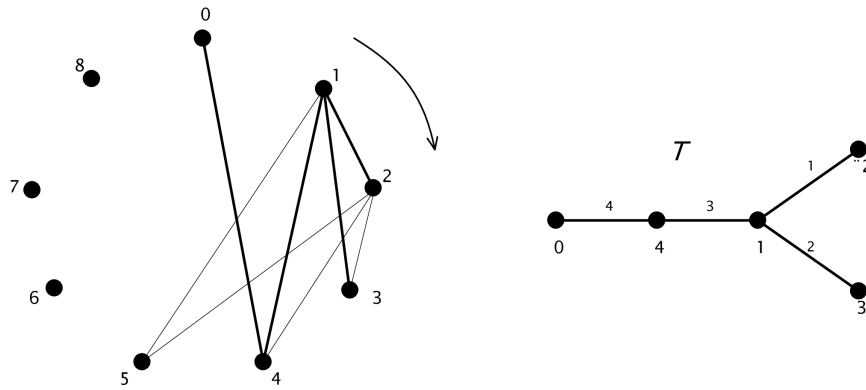
**Definice 22 (Cyklický rozklad)** [6]  *$H$ -rozklad grafu  $G$  na podgrafy  $H_1, H_2, \dots, H_t$  je cyklický, jestliže existuje izomorfismus grafu  $G$ , který indukuje cyklickou permutaci  $f_v$  na množině vrcholů*

$V(G)$  a platí: jestliže  $H_i \in \mathcal{H}$ , pak  $f(H_i) \in \mathcal{H}$  pro  $i = 1, 2, \dots, t$ , kde  $f(H_i)$  je podgraf  $G$  s  $V(f(H_i)) = \{f(u) : u \in V(H_i)\}$  a  $E(f(H_i)) = \{f(u)f(v) : uv \in E(H_i)\}$ .

Navážeme na definici 17 o  $\rho$ -ohodnocení. Odtud  $\rho$ -ohodnocení grafu  $G$  je vnořením  $G$  do  $K_{2m+1}$ , kde  $V(K_{2m+1}) = \{1, 2, \dots, 2m\}$ , takovým, že existuje přesně jedna hrana grafu  $G$  délky  $i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$ . Rosa [3] dokázal následující větu 3.1.

**Věta 3.1** [6] *Nechť  $H$  je graf s  $m$  hranami. Pak existuje cyklický  $H$ -rozklad grafu  $K_{2m+1}$  právě tehdy, když  $H$  má  $\rho$ -ohodnocení.*

Příklad cyklického rozkladu grafu  $K_t$  na kopie stromu  $T$  s graciózním ohodnocením je na obrázku 21.



Obrázek 21: Cyklický rozklad grafu  $K_9$  na 9 kopií grafu  $T$  s graciózním ohodnocením.

Permutační matice tohoto příkladu vypadá následovně:

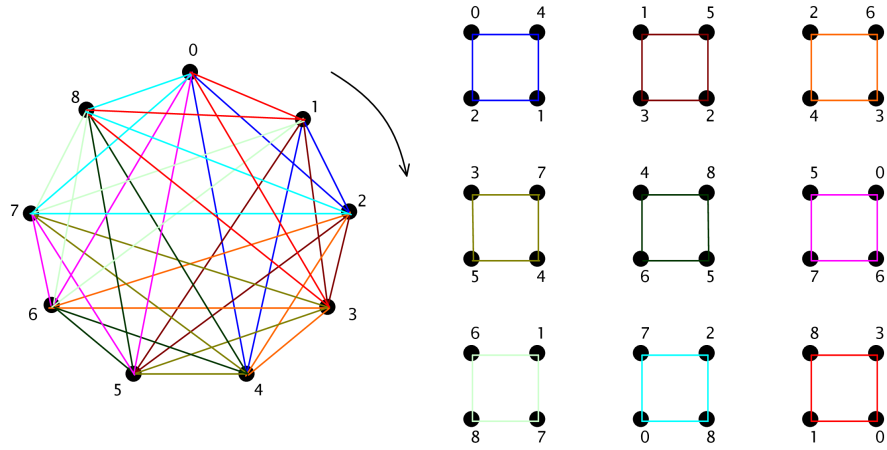
$$f_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

**Poznámka:** Protože  $\alpha$ -ohodnocení i graciózní ohodnocení jsou současně  $\rho$ -ohodnocením, platí věta 3.1 o cyklickém rozkladu pro každý graf, jak s  $\alpha$ -ohodnocením, tak i s graciózním ohodnocením. Navíc pokud má graf  $\alpha$ -ohodnocení, dá se použít na cyklický rozklad i větších grafů na více malých kopií grafu s  $\alpha$ -ohodnocením. To je obsahem další věty od A. Rosy.

**Věta 3.2** [3] *Pokud graf  $G$  s  $m$  hranami má  $\alpha$ -ohodnocení, potom existuje cyklický  $G$ -rozklad kompletního grafu  $K_{2mx+1}$  pro všechna přirozená čísla  $x$ .*

Příklad cyklického  $C_4$ -rozkladu úplného grafu  $K_9$  je na obrázku 22. Pro  $x = 1$  a  $m = 4$  tedy existuje  $9 = 2mx + 1$  podgrafů  $K_9$  izomorfních s  $C_4$  s  $\alpha$ -ohodnocením.





Obrázek 22: Cyklický rozklad  $K_9$  na kopie  $C_4$ .

### 3.3.2 Perfektní systém diferenčních množin (PSDS)

Jednou z možných aplikací graciózních ohodnocení může být perfektní systém diferenčních množin, z angličtiny PSDS. Souvislost tohoto systému s graciózním ohodnocením grafů a naopak graciózního ohodnocení s PSDS uvedeme dále. Nejprve zavedeme definici pojmu, co PSDS znamená.

**Definice 23 (PSDS - Perfektní systém diferenčních množin)** [4] *Nechť  $c, m, p_1, p_2, \dots, p_m$  jsou přirozená čísla a necht'  $S_i = \{x_{0i} < x_{1i} < \dots < x_{p_i}\}$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$ , jsou posloupnosti celých čísel a dále  $D_i = \{x_{ji} - x_{ki}, 0 \leq k < j \leq p_i\}$  jsou jejich diferenční množiny. Pak říkáme, že systém  $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$  je perfektním systémem diferenčních množin (perfect system of difference sets = PSDS) začínající číslem  $c$ , jestliže*

$$\bigcup_{i=1}^m D_i = \left\{ c, c+1, c+2, \dots, c-1 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} p_i(p_i+1) \right\}$$

Každá množina  $D_i$  se nazývá komponentou PSDS  $\{D_1, \dots, D_m\}$ . Číslo  $p_i$  určuje velikost komponenty  $D_i$  a PSDS se nazývá *pravidelný*, pokud jeho všechny komponenty mají stejnou velikost, tj.  $p_1 = p_2 = \dots = p_m = n-1$ . Je zvykem, že pravidelný PSDS s  $m$  komponentami stejné velikosti začínající na čísle  $c$  se označuje jako  $(m, n, c)$ .

Pokud položíme  $x_{j+k-1,i} - x_{j-1,i} = d_{ji}(k)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p_i + 1 - k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p_i$ ,  $i =$

$1, 2, \dots, m$ , pak prvky  $D_i$  jsou znázorněny pomocí diferenčního trojúhelníka:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & d_{j,i}(p_i) & & \\
 & & & & \dots\dots\dots & & \\
 & & & & \dots\dots\dots & & \\
 & & d_{1,i}(2) & d_{2,i}(2) & \dots\dots\dots & d_{p_i-2,i}(2) & d_{p_i-1,i}(2) \\
 d_{1,i}(1) & d_{2,i}(1) & d_{3,i}(1) & \dots\dots\dots & d_{p_i-2,i}(1) & d_{p_i-1,i}(1) & d_{p_i,i}(1) \\
 \hline
 x_{0,i} & x_{1,i} & x_{2,i} & \dots\dots\dots & & x_{p_i-1,i} & x_{p_i,i}
 \end{array}$$

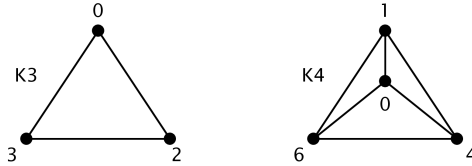
Biraud a Blum [4] byli pravděpodobně první, kteří si všimli souvislosti mezi graciózním ohodnocením grafů a PSDS. Pravidelný PSDS  $(1, n, 1)$  je PSDS s jednou komponentou začínající od 1. Existují pouze dva pravidelné PSDS  $(1, n, 1)$ , jak je na obrázku 23.

$$\begin{array}{ccc}
 & 3 & \\
 & 1 \quad 2 & \\
 \hline
 \text{S: } 0 & 1 & 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & 6 & \\
 & 4 \quad 5 & \\
 & 1 \quad 3 \quad 2 & \\
 \hline
 \text{S: } 0 & 1 & 4 \quad 6
 \end{array}$$

Obrázek 23: PSDS  $(1, 3, 1)$  a  $(1, 4, 1)$ .

Z výše znázorněných dvou diferenčních trojúhelníků s aplikací PSDS je možné každý z nich symetrickým otočením podle svislé osy dostat opět PSDS.

Ve skutečnosti PSDS  $(1, n, 1)$  je ekvivalentní s graciózním ohodnocením  $K_n$ . Například  $(1, 3, 1)$  a  $(1, 4, 1)$  jsou graciózní ohodnocení  $K_3$  a  $K_4$  v tomto pořadí (viz obrázek 24).



Obrázek 24: Graciózní ohodnocení grafů  $K_3$  a  $K_4$ .

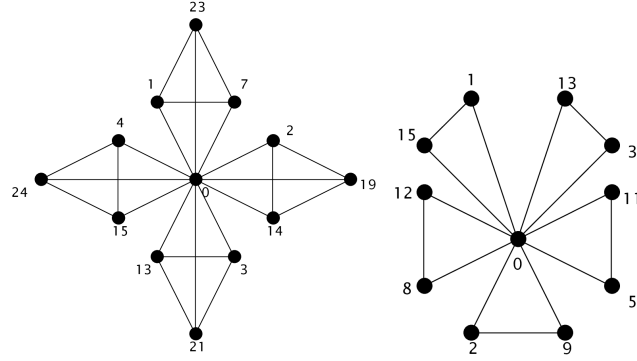
Existence PSDS  $(m, n, 1)$  je ekvivalentní s graciózním ohodnocením grafu  $mK_n$ , kde  $m$  kopií  $K_n$  má jeden společný vrchol. Takový graf se nazývá windmill graf, jak jsme zmínili v definici 12. Bermond se zabýval [4] ekvivalencí tohoto grafu s graciózním ohodnocením, jak je uvedeno v následující větě 3.3.

**Věta 3.3** [4] *Holandský  $m$ -windmill graf je graciózní právě tehdy, když  $m \equiv 0$  nebo  $1 \pmod{4}$ .*

Následující hypotéza je pravdivá pro  $4 \leq m \leq 32$

**Hypotéza 0.1** [4] *Franzouzský  $m$ -windmill graf je graciózní pro  $m \geq 4$ .*

Příklady graciózních ohodnocení Francouzského a Holandského  $m$ -windmill grafu jsou na obrázku 25 a jím odpovídající PSDS na obrázcích 26 a 27.



Obrázek 25: Příklady graciózního ohodnocení *Franouzského 4-windmill* a *Holandského 5-windmill* grafu.

23	19	24	21
7 22	14 17	15 20	13 18
1 6 16	2 12 5	4 11 9	3 10 8
0 1 7 23	0 2 14 19	0 4 15 24	0 3 13 21

Obrázek 26: PSDS  $(4, 4, 1)$  odpovídající gracióznímu ohodnocení *Franouzského 4-windmill* grafu.

15	13	11	12	9
1 14	3 10	5 6	8 4	2 7
0 1 15	0 3 13	0 5 11	0 8 12	0 2 9

Obrázek 27: PSDS  $(5, 3, 1)$  odpovídající gracióznímu ohodnocení *Holandského 5-windmill* grafu.

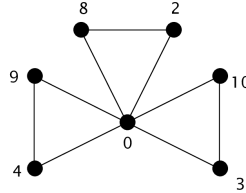
Protože PSDS  $(1, n, c)$  pro  $c > 1$  neexistuje, žádný kompletní graf není  $c$ -graciózní pro  $c > 1$ .

Jestliže existuje PSDS  $(m, n, c)$  pro  $c > 1$ , pak existuje graf s  $c$ -graciózním ohodnocením, který lze rozložit na  $m$  stejně velkých podgrafů každý s  $n$  vrcholy. Tato implikace platí i obráceně. Takže PSDS  $(m, n, c)$  odpovídá grafu s  $c$ -graciózním ohodnocením s  $\frac{mn(n-1)}{2}$  hranami očíslovaných od  $c$  do  $\frac{mn(n-1)}{2} + c - 1$ .

Pokud existuje pravidelný perfektní systém  $(3, 3, 2)$  (obrázek 28), pak existuje *Holandský 3-windmill 2-graciózní* graf, ten je na obrázku 29.

	8		9		10						
	2	6		4	5						
S1:	0	2	8	S2:	0	4	9	S3:	0	3	10

Obrázek 28: PSDS  $(3, 3, 2)$ .



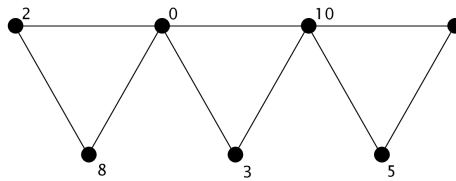
Obrázek 29: Graciózní ohodnocení *Holandského 3-windmill grafu*.

Z PSDS se stejnými parametry lze vytvořit různé c-graciózní grafy. Například při změně množiny  $S_2$  z předchozího příkladu dostaneme jiný c-graciózní graf odpovídající PSDS  $(3, 3, 2)$ , viz obrázek 30.

	8		9		10						
	2	6		4	5						
S1:	0	2	8	S2:	1	5	10	S3:	0	3	10

Obrázek 30: PSDS  $(3, 3, 2)$ .

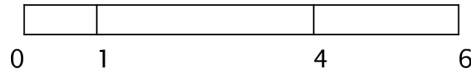
Tyto komponenty nemají jeden společný vrchol, ale dvě mají společný vrchol 0 a dvě společný vrchol 10. Dostaneme tak 2-graciózní ohodnocení tzv.  $\Delta_3$ -hada, viz 31.



Obrázek 31: 3-graciózní ohodnocení  $\Delta_3$ -hada.

### 3.3.3 Golombovo pravítko

Problém graciózního ohodnocení úplného grafu  $K_n$  můžeme převést na problém umístění  $n$  očíslovaných značek na pravítku, kde vzdálenosti mezi každými dvěma značkami jsou dány různými přirozenými čísly. Obrázek 32 ukazuje model pravítka, který odpovídá konkrétnímu grafu  $K_4$  s graciózním ohodnocením. Tímto pravítkem můžeme měřit jakoukoliv vzdálenost danou kladným celým číslem od 1 do 6 mezi dvěma odpovídajícími značkami pravítka.



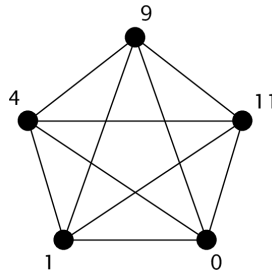
Obrázek 32: Model pravítka odpovídající grafu  $K_4$  s graciózním ohodnocením.

Roku 1972 Golomb publikoval [4] problém, k jehož formulaci budeme potřebovat následující definici.

**Definice 24** ( $\theta(G)$ ) *Nechť  $G(V, E)$  je jednoduchý graf s  $n$  vrcholy a  $m$  hranami. Vrcholům grafu přiřadíme  $n$  různých nezáporných celých čísel tak, že hranám přiřazená čísla rozdílem  $|\lambda(v) - \lambda(u)|$ , kde  $\lambda(u), \lambda(v)$  jsou čísla na vrcholech, jsou různá. Pokud největší číslo přiřazené vrcholům je nejmenší možné, značí se  $\theta(G)$ .*

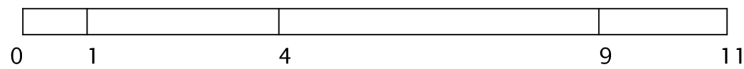
Zmíněný problém se týká toho, jak očíslovat vrcholy grafu  $G$  tak, abychom dosáhli minima  $\theta(G)$ . Je zřejmé, že platí  $\theta(G) \geq m$  a graf, pro který platí  $\theta(G) = m$ , je graciózní.

Nás bude zajímat případ, kdy  $G = K_n$ . Na obrázku 33 je zobrazeno řešení problému pro  $G = K_5$ . Můžeme si všimnout, že  $\theta(K_5) = 11$ , přičemž žádná hrana nemá ohodnocení 6.  $\theta(K_5) \neq 10$ , protože odpovídající úplný graf  $K_5$  s 10 hranami nemůžeme očíslovat vrcholy tak, abychom mohli očíslovat všechny hrany různými čísly od 1 po 10.



Obrázek 33: Ohodnocení  $K_5$  s  $\theta(K_5) = 11$ .

Pokud se při měření pravítkem nemá žádná hodnota opakovat, pak pro  $K_n, n \geq 5$  musí být pravítko delší než  $\binom{n}{2}$ , protože odpovídající úplný graf na  $n$  vrcholech má právě  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  hran, a  $\theta(G)$  odpovídá minimální délce pravítka. Roku 1972 Gardner [4] nazval tyto  $n$ -značkové, ne nadbytečné, nejkratší pravítka *Golombovými pravítky*.



Obrázek 34: Pravítko odpovídající ohodnocení úplného grafu  $K_5$ .

Obrázek 34 ukazuje Golombovo pravítko délky  $\theta(K_5) = 11$  odpovídající ohodnocení grafu  $K_5$ . V ohodnocení  $K_5$  žádná hrana není ohodnocena číslem 6 a s ekvivalentním pravítkem nemůže být provedeno žádné měření délky 6.

Golombová pravítka s méně než jedenácti značkami můžeme vidět v tabulce 1.

Tabulka 1: Golombova pravítka pro  $2 \leq n \leq 10$ .

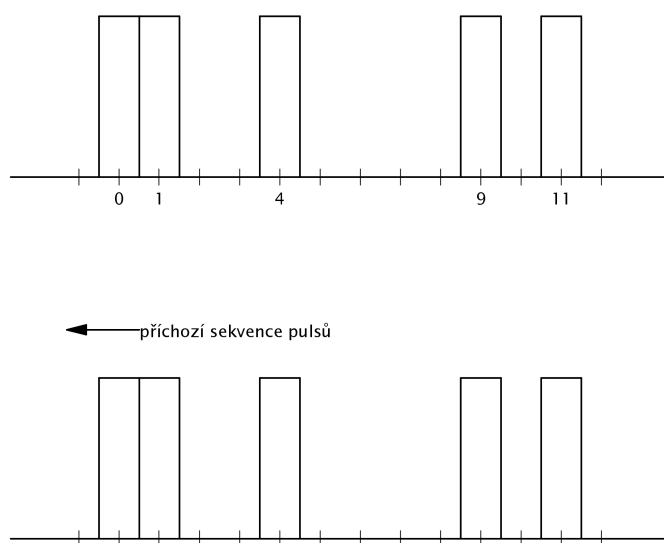
<b>n</b>	$\binom{n}{2}$	$\theta(K_n)$	<b>Značky v bodech</b>
2	1	1	0, 1
3	3	3	0, 1, 3
4	6	6	0, 1, 4, 6
5	10	11	0, 1, 4, 9, 11 nebo 0, 2, 7, 8, 11
6	15	17	0, 1, 4, 10, 12, 17 nebo 0, 1, 4, 10, 15, 17 nebo 0, 1, 8, 11, 13, 17 nebo 0, 1, 8, 12, 14, 17
7	21	25	0, 1, 4, 10, 18, 23, 25 nebo 0, 1, 7, 11, 20, 23, 25 nebo 0, 1, 11, 16, 19, 23, 25 nebo 0, 2, 3, 10, 16, 21, 25
8	28	34	0, 1, 4, 9, 15, 22, 32, 34
9	36	44	0, 1, 5, 12, 25, 27, 35, 41, 44
10	45	55	0, 1, 6, 10, 23, 26, 34, 41, 53, 55

Výpočetní náročnost hledání  $\theta(K_n)$  roste exponenciálně s počtem vrcholů  $n$ . Aktuálně největší nalezené Golombovo pravítko odpovídá grafu  $K_{27}$  s takovýmto očíslováním vrcholů:

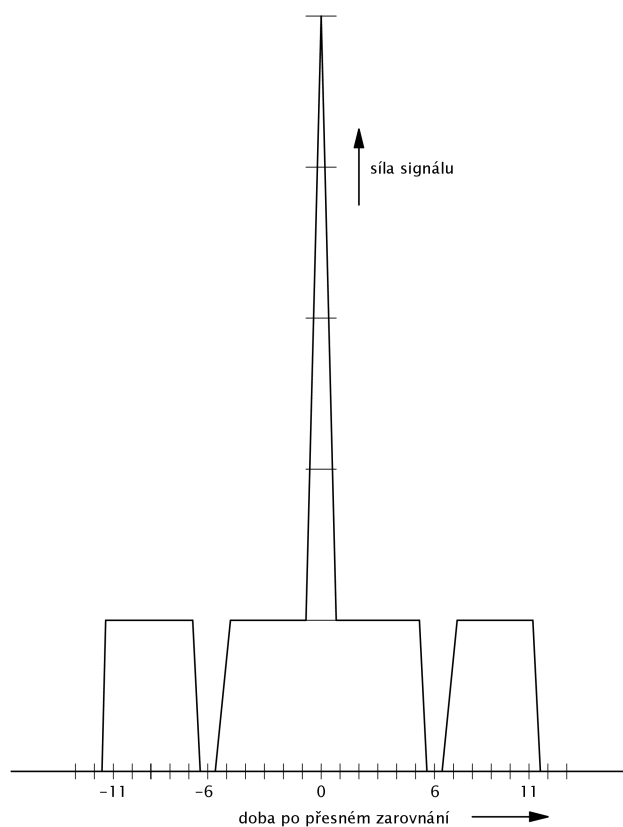
0 3 15 41 66 95 97 106 142 152 220 221 225 242 295 330 338 354 382 388 402 415 486 504 523  
546 553.

Bylo to dokázáno v projektu *distributed.net* dne 19. února 2014 [14]. Na nalezení pravítka s 28 značkami se stále pracuje.

**3.3.3.1 Radarové pulsní kódování** Podíváme se [8] nejprve na příklad na obrázcích 33 a 34. Jeden z nich může vytvářet radarový kód z pravítka emitováním posloupnosti pěti pulsů v časech ekvivalentních se značkami na pravítku, v tomto případě 0, 1, 4, 9 a 11. Mezi počátkem prvního a druhého pulsů je jednotkový časový interval. Mezi druhým a třetím je tříjednotkový interval. Mezi třetím a čtvrtým je to pět jednotek a mezi posledními dvěma jsou to dvě jednotky. Časový interval mezi emitováním signálu a jeho návratem je určený vztahem mezi všemi posloupnostmi jedenácti časových jednotek s původní posloupností. Nechť každý puls je jednou časovou jednotkou. Pak, když příchozí řetězec odpovídá originálu (viz obrázek 35), je generován signál síly 5. Při jakémkoliv seskupení příchozí posloupnosti s původní šablonou může být generován nejvíce jeden příchozí puls. Potom při absenci hluku nenormalizovaná nesynchronizovaná autokorelace může dosáhnout maximální vzdálenosti rovné jedné. To je zobrazeno na obrázku 36.



Obrázek 35: Korelace řady radarových kódových pulsů s obrazem sebe sama. Moment, kdy vracející se pulsní řada rozmístění pravítka je zarovnána se svojí šablonou.



Obrázek 36: Autokorelační funkce pro vracející se řadu pulsů.

Spád v autokorelaci nastává v časových jednotkách  $+6$  a  $-6$ , kvůli tomu, že mezi pulsy není žádný s posunem velikosti šesti pulsů vzhledem k jejich synchronizované pozici. Číslo šest je zároveň jedinou vzáleností jedenácti nebo méně jednotek takových, že původní pravítko je nemůže změřit, a je jediné číslo hrany chybějící v ohodnocení  $K_5$ , viz obrázky 33 a 34.

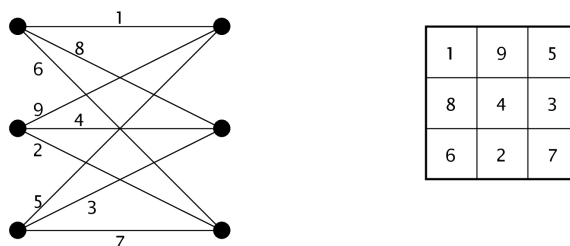
V další kapitole zavedeme pojmy magická, antimagická a hendikepová ohodnocení grafů, která využijeme dále v aplikacích ohodnocení grafů.



## 4 Magická ohodnocení

Magická ohodnocení byla představena roku 1963 Sedláčkem [2] jako obdoba magických čtverců v matematice. Na základě tohoto v polovině šedesátých let přišel Stewart [2] se studií různých druhů ohodnocení hran.

Semi-magický čtverec je čtverec s rozměry  $n \times n$  a čísla od 1 po  $n^2$  v jeho políčkách, kdy součet čísel v každém řádku a v každém sloupci je stejný. Semi-magický čtverec odpovídá magickému ohodnocení kompletního bipartitního grafu  $K_{n,n}$  (viz příklad na obrázku 37). Magické čtverce narozdíl od semi-magických mají stejný součet čísel (nazývá se *magická konstanta*) jak na řádcích a sloupcích, tak na diagonálách.



Obrázek 37: Bipartitní graf  $K_{3,3}$  a jemu odpovídající semi-magický čtverec  $3 \times 3$  s magickou konstantou 15.

Uvedeme (viz zdroj [20]) definici *magického* a *semi-magického* grafu (viz 25).

**Definice 25 (Magický a semi-magický graf)** Předpokládejme konečný jednoduchý graf  $G = (V, E)$ . Pokud existuje zobrazení  $\lambda : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$  takové, že

1. rozdílné hrany mají rozdílné očíslování,
2. součet čísel hran incidentních k určitému vrcholu  $v$  je stejný pro všechny vrcholy grafu  $G$ ,

potom graf  $G$  nazýváme *magickým* a zobrazení  $\lambda$  nazveme *magickým ohodnocením*. Jestliže graf  $G$  splňuje pouze 1. podmínku, nazýváme jej *semi-magickým grafem* a takový graf má *semi-magické ohodnocení*.

V dalších podkapitolách zavedeme definice magických, antimagických a hendikepových ohodnocení.

### 4.1 Definice některých ohodnocení magického typu

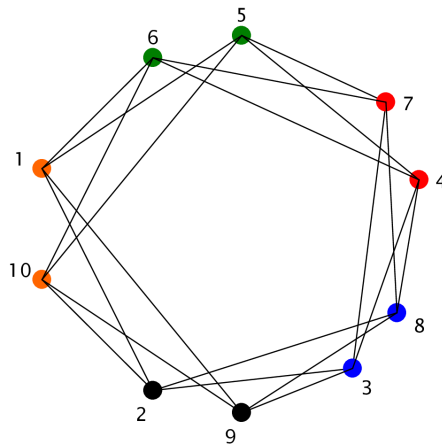
Protože se chceme zmínit o dalších aplikacích magických ohodnocení grafů (viz podkapitola 4.3), potřebujeme následující tři definice.

**Definice 26 (Distančně magické ohodnocení)** [9] *Distančně magické ohodnocení grafu  $G$  s  $n$  vrcholy je bijekce  $\lambda : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , kde existuje kladné celé číslo  $\mu$  takové, že*

$$w(x) = \sum_{y \in N(x)} \lambda(y) = \mu \text{ pro každé } x \in V.$$

*Konstanta  $\mu$  se nazývá magickou konstantou ohodnocení  $\lambda$ , a  $N(x)$  označuje množinu vrcholů sousedních k  $x$ . Součet  $\sum_{y \in N(x)} \lambda(y)$  se nazývá váhou vrcholu  $x$  a značí se  $w(x)$ . Graf, pro který existuje distančně magické ohodnocení, se nazývá distančně magický graf.*

Příklad distančně magického ohodnocení 4-pravidelného grafu na 10 vrcholech je na obrázku 38.

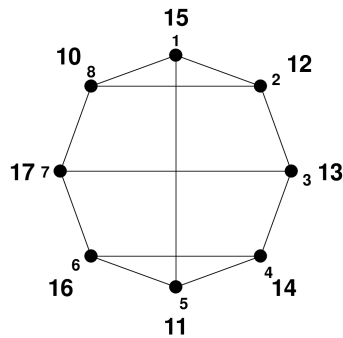


Obrázek 38: Příklad distančně magického ohodnocení s magickou konstantou 22.

**Definice 27 (Distančně  $d$ -antimagické ohodnocení)** [9] *Distančně  $d$ -antimagické ohodnocení grafu  $G = (V, E)$  s  $n$  vrcholy je bijekce  $\lambda : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , kde existuje seřazení vrcholů grafu  $G$  takové, že váhy  $w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_n)$  tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí  $d$ . Jestliže  $d = 1$ , potom  $\lambda$  se nazývá distančně antimagické ohodnocení. Graf  $G$  je distančně  $d$ -antimagický graf, pokud existuje jeho distančně  $d$ -antimagické ohodnocení a  $d > 1$ . Váha každého vrcholu je*

$$w(x_i) = \sum_{y \in N(x)} \lambda(y).$$

Příklad distančně antimagického ohodnocení je na obrázku 39.



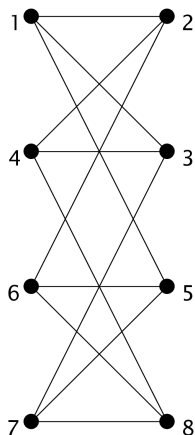
Obrázek 39: Příklad distančně antimagického ohodnocení (váhy vrcholů tvořící aritmetickou posloupnost jsou vyznačeny větším fontem).

**Definice 28 (Hendikepové ohodnocení)** [9] *Hendikepové (jinak také uspořádané antimagické) ohodnocení grafu  $G = (V, E)$  s  $n$  vrcholy je bijekce  $\lambda : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , kde  $\lambda(x_i) = i$  a posloupnost váh  $w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_n)$  tvoří rostoucí aritmetickou posloupnost s diferencí 1. Graf  $G$  je hendikepový, pokud existuje jeho hendikepové ohodnocení.*

*Váha každého vrcholu je*

$$w(x_i) = \sum_{y \in N(x)} \lambda(y) = \mu + \lambda(x_i) = \mu + i.$$

Příklad hendikepového ohodnocení grafu je na obrázku 40.



Obrázek 40: Příklad hendikepového ohodnocení grafu, kde  $\mu = 9$ .

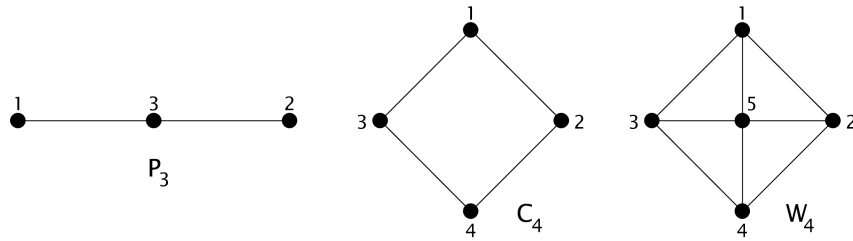
## 4.2 Známé výsledky týkající se distančně magických, antimagických a hendikepových ohodnocení

Pro základní typy grafů jsou známy tyto výsledky:

**Věta 4.1** [11] [17]

1. Cesta  $P_n$  s  $n$  vrcholy je *distančně magický* graf právě tehdy, když  $n = 1$  nebo  $n = 3$ .
2. Cyklus  $C_n$  s  $m$  hranami je *distančně magický* graf právě tehdy, když  $n = 4$ .
3. Úplný graf  $K_n$  je *distančně magický* právě tehdy, když  $n = 1$ .
4. Kolový graf  $W_n$  je *distančně magický* právě tehdy, když  $n = 4$ .
5. Strom  $T$  je *distančně magický* graf právě tehdy, když  $T = P_1$  nebo  $T = P_3$ .

Některé z těchto grafů jsou na obrázku 41.



Obrázek 41: Cesta  $P_3$ , cyklus  $C_4$  a kolový graf  $W_4$  s *distančně magickým* ohodnocením.

Základní vlastnost *antimagického* ohodnocení zmíním v následující větě 4.2.

**Věta 4.2** [11] *Jestliže  $G$  je *distančně magický*, potom doplněk  $\overline{G}$  je *distančně antimagický*.*

Následující věta o *hendikepovém* ohodnocení [9] se zabývá existencí *hendikepového* grafu pro zadané  $r$  a  $n$ .

**Věta 4.3 (Hendikepový  $r$ -regulární graf na sudém počtu vrcholů)** [21] *Hendikepový  $r$ -regulární graf na  $n$  vrcholech existuje pro  $n \geq 8$  a*

1.  $n \equiv 0 \pmod{4}$  *právě tehdy, když  $3 \leq r \leq n - 5$  a  $r$  je liché*
2.  $n \equiv 2 \pmod{4}$  *právě tehdy, když  $3 \leq r \leq n - 7$  a  $r \equiv 3 \pmod{4}$*

*s výjimkou případů, kdy  $r = 3$  a  $n = 10, 12, 14, 18, 22$  a  $26$ .*

Z [21] dále víme, že neexistují  $r$ -regulární *hendikepové* grafy s  $n$  vrcholy pro  $r$  a  $n$  stejné parity.

Některé *hendikepové* grafy s velmi malou nebo velmi velkou regularitou  $r$  neexistují. Následují dvě věty, které vylučují některé druhy těchto grafů:

**Věta 4.4** [21] *Netriviální  $r$ -regulární hendikepový graf s  $n$  vrcholy neexistuje, jestliže  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r = n - 1$  a  $r = n - 2t$ , kde  $t \in [1, \lfloor n/2 \rfloor]$ .*

**Věta 4.5** [21] *Neexistuje  $(n - 3)$ -regulární hendikepový graf na  $n$  vrcholech.*

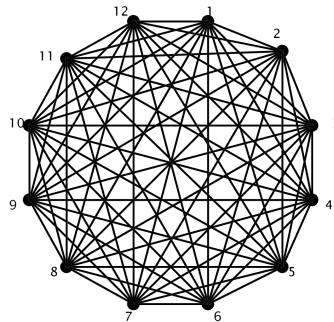
### 4.3 Aplikace

Možná aplikace využití distančně magických a distančně antimagických ohodnocení je v přípravě rozpisu zápasů ve sportovních turnajích.

**Definice 29 (Úplný turnaj)** [12] *Úplný turnaj je soutěž, ve které každý tým hraje s každým týmem právě jednou.*

**Poznámka:** Grafový model turnaje znamená, že vrcholům grafu odpovídají týmy a hranám odpovídají odehrané zápasy mezi dvojicemi týmů.

Příklad modelu úplného turnaje odpovídající grafu  $K_{12}$  je na obrázku 42.



Obrázek 42: Graf  $K_{12}$  modelující úplný turnaj 12 týmů.

Předpokládáme, že úplný turnaj je spravedlivý. Nebereme v úvahu, že některé týmy jsou znevýhodněné, respektive zvýhodněné, když hrají venku, respektive doma. Případně ne všechny týmy hrají každé kolo a mohou být znevýhodněné třeba tím, že hrají více zápasů za krátký čas, ale jiné týmy to tak nemají.

Ne všechny zápasy úplného turnaje se vždy stíhají odehrát, a proto nastavujeme turnaj neúplný, který bude ve spravedlnosti kopírovat turnaj úplný. Přiřazení čísel vrcholům úplného grafu odpovídá distančně antimagickému ohodnocení grafu, tedy čísla na vrcholech tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 1. Vybereme neúplný turnaj a to takový, že jemu odpovídající graf bude také distančně antimagický.

Pro další úvahy budeme potřebovat určit obtížnosti zápasů a síly týmů. Dáme do souvislosti očíslování týmů s jejich silou. Pokud vezmeme v úvahu sílu oponentů každého týmu, tak se pro každých  $n$  týmů v turnaji seřadí týmy od nejsilnějších po nejslabší, takže nejsilnější tým má číslo 1 a nejslabší tým má číslo  $n$ . Sílu v pořadí  $i$ -tého týmu označíme  $s_n(i) = n + 1 - i$ . Proto nejsilnější tým má sílu  $n$  a nejslabší tým má 1. Navíc celková síla soupeřů týmu  $i$  v úplném turnaji je označena jako  $S_{n,n-1}(i) = \frac{n(n+1)}{2} - s_n(i) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + i$  (viz [10]).

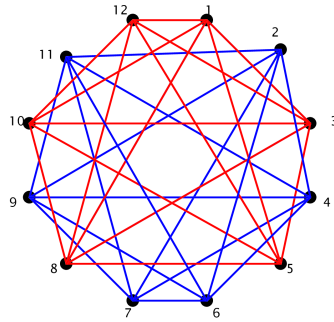
Jak jsme se zmínili výše, možnou cestou, jak vytvořit spravedlivý rozpis, je navrhnout „spravedlivý“ neúplný turnaj, jinak psané FIT (anglicky „fair incomplete tournament“).

**Definice 30 (Spravedlivý neúplný turnaj FIT)** [11] *Ve FIT( $n, k$ ) turnaji  $n$  týmů o  $r$  kolech každý tým hraje přesně s  $k$  jinými týmy a celková síla spoluhráčů, s kterými tým  $i$  hraje je  $S_{n,k}(i) = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + i - m$ , kde  $m$  je pevná konstanta. V takovém turnaji síla, která každému týmu chybí k úplnému turnaji, je právě  $m$ .*

Příklad rozpisu FIT turnaje můžeme vidět v tabulce 2 a v grafu na obrázku 43.

Tabulka 2: Rozpis spravedlivého neúplného turnaje (FIT) pro 12 týmů o 5 kolech.

Tým	Kolo 1	Kolo 2	Kolo 3	Kolo 4	Kolo 5
1	12	3	10	5	8
2	11	4	9	6	7
3	5	1	12	8	10
4	7	2	11	9	6
5	3	10	8	1	12
6	9	11	7	2	4
7	4	9	6	11	2
8	10	12	5	3	1
9	6	7	2	4	11
10	8	5	1	12	3
11	2	6	4	7	9
12	1	8	3	10	5



Obrázek 43: Graf neúplného turnaje odpovídající rozpisu zápasů pro FIT(12,5).

Turnaji FIT odpovídá  $r$ -pravidelný graf s  $n$  vrcholy, který má distančně antimagické ohodnocení.

V dalším typu neúplného turnaje zavedeme pojem *vyrovnaného neúplného turnaje*, jinak EIT(anglicky „equalized incomplete tournament“), a snažíme se, aby nejsilnější i nejslabší týmy hrály se soupeři s celkovou silou, která je stejná pro každý tým, viz definice 31

**Definice 31 (Vyrovnaný neúplný turnaj EIT)** [11]  $EIT(n, r)$  turnaj  $n$  týmů v  $r$  kolech je turnaj, ve kterém každý tým hraje právě s  $r$  jinými týmy a celková síla soupeřů, s kterými tým  $i$  hraje, je konstantou. Sílu oponentů můžeme označit

$$S_{n,r}(i) = \mu = \sum_{j \in N(i)} n - \lambda(j) = rn - w(i),$$

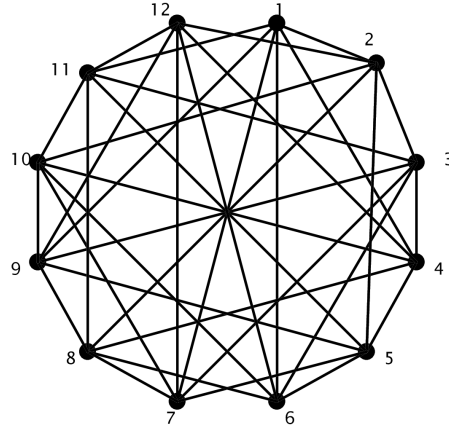
kde  $w(i) = \sum_{j \in N(i)} \lambda(j)$  pro každé  $i$  a  $\mu$  je pevná konstanta. V takovém turnaji každý tým má stejnou sílu protivníků.

Grafu, který je  $r$ -pravidelný na  $n$  vrcholech a který má distančně magické ohodnocení, odpovídá vyrovnaný neúplný turnaj. Nalezení  $EIT(n, r)$  odpovídá nalezení grafu s distančně magickým  $r$ -pravidelným ohodnocením na  $n$  vrcholech a magickou konstantou  $\mu = \frac{(n+1)r}{2}$ .

V  $FIT(n, r)$  usilujeme o podobnou spravedlnost, jak to je u úplného sportovního turnaje. V  $EIT(n, k)$  posouváme tuto spravedlnost ještě dále tím, že síla oponentů pro každý tým je stejná. Předpokládejme, že chceme navrhnout sportovní turnaj s 12 týmy, kde každý tým hraje 6 her. Rozpis turnaje  $EIT(12, 6)$  určující protivníka pro každý tým v každém kole je zobrazen v tabulce 3 a na obrázku 44. Pevná konstanta  $\mu$  je v tomto případě 39. Nalezení  $EIT(12, 6)$  je ekvivalentní s nalezením distančně magického ohodnocení pro 6-pravidelný graf na 12 vrcholech s magickou konstantou 39.

Tabulka 3: Rozpis vyrovnaného neúplného turnaje (EIT) pro 12 týmů o 6 kolech.

Tým	Kolo 1	Kolo 2	Kolo 3	Kolo 4	Kolo 5	Kolo 6
1	2	4	6	7	9	11
2	1	3	5	8	10	12
3	4	2	7	9	11	6
4	3	1	8	10	12	5
5	9	6	2	11	7	4
6	10	5	1	12	8	3
7	12	10	3	1	5	8
8	11	9	4	2	6	7
9	5	8	12	3	1	10
10	6	7	11	4	2	9
11	8	12	10	5	3	1
12	7	11	9	6	4	2



Obrázek 44: Graf neúplného turnaje odpovídající rozpisu zápasů pro EIT(12,6).

Odebereme-li graf odpovídající FIT(12, 5) z úplného grafu, zůstane nám doplněk (viz definice 13), který odpovídá turnaji EIT(12, 6). Tedy z úplného grafu  $K_n$  odebereme distančně  $r$ -pravidelný antimagický graf o  $n$  vrcholech a zůstane doplněk, který tvoří  $(n - r - 1)$ -pravidelný distančně magický graf. Turnaje FIT(12,5) a EIT(12,6) v našem případě jsou navrženy tak, že jeden je doplněkem úplného grafu k druhému, tj. můžeme jednoduše ověřit, že tabulky 2 a 3 se po řádcích navzájem doplňují.

V EIT nebo FIT silný tým pravděpodobně vyhraje více her než ten slabý [10]. Proto byl navržen *hendikepový neúplný turnaj* (HIT), ve kterém silnější týmy hrají se silnějšími a slabší se slabšími. A tedy mírně zvýhodněny jsou slabší týmy.

**Definice 32 (Hendikepový neúplný turnaj HIT)** [10] *Hendikepový neúplný turnaj  $n$  týmů v  $r$  kolech,  $HIT(n, r)$  (z angličtiny handicap incomplete tournament) je turnaj, kde každý tým  $i$  se silou  $s_n(i) = n + 1 - i$  hraje s  $r$  protivníky s celkovou silou  $S_{n,r}(i) = \mu + s_n(i)$ , kde magická konstanta (viz [22])  $\mu = \frac{(r-1)(n+1)}{2}$  (To znamená, že nejsilnější tým hraje s nejsilnějšími a nejslabší tým hraje s nejslabšími soupeři).*

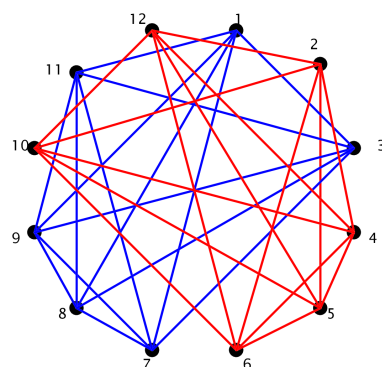
Rozpis turnaje HIT odpovídá  $r$ -pravidelnému hendikepovému grafu na  $n$  vrcholech.

Například předpokládejme, že chceme navrhnout hendikepový neúplný turnaj s 12 týmy, kde každý tým hraje 5 zápasů. Rozpis  $HIT(12, 5)$  pro každý tým v každém kole je zobrazen v tabulce 4. Magická konstanta tak, jak jsme ji zavedli pro daný rozpis, se rovná  $\mu = \frac{(5-1)(12+1)}{2} = 26$ , tj. pro nejsilnější tým číslo 1 se silou 12 je  $S_{12,5}(1) = 26 + 12 = 38$ , pro druhý nejsilnější tým to je  $S_{12,5}(2) = 26 + 11 = 37$  a tak dále až po nejslabší tým, kde  $S_{12,5}(12) = 26 + 1 = 27$ . Na obrázku 45 můžeme vidět, že příkladem turnaje na 12 vrcholech jsou dva oddělené  $K_6$  grafy, každý se součtem vrcholů 39 a tomu odpovídá magická konstanta  $\mu = 26$  z definice 32.



Tabulka 4: Rozpis hendikepového neúplného turnaje s 5 koly pro 12 týmů.

Tým	Kolo 1	Kolo 2	Kolo 3	Kolo 4	Kolo 5
1	11	3	9	7	8
2	12	10	4	5	6
3	9	1	8	11	7
4	10	5	2	6	12
5	6	4	12	2	10
6	5	12	10	4	2
7	8	9	11	1	3
8	7	11	3	9	1
9	3	7	1	8	11
10	4	2	6	12	5
11	1	8	7	3	9
12	2	6	5	10	4



## 5 Rádiové ohodnocení

V roce 1980 Hale [16] popsal problém přiřazování rádiových frekvencí komunikačním kanálům. Později v roce 2001 Chartrand [16] přišel s nápadem přiřazení kanálů FM rádiovým stanicím. Kanálům jsou přiřazena kladná celá čísla a úroveň rušení odpovídá vzdálenosti mezi stanicemi. Pro menší vzdálenosti je rušení větší, takže stanicím geograficky blízkým musí být přiřazeny kanály s velkým rozdílem frekvencí, zatímco pro stanice navzájem vzdálenější tento rozdíl může být menší. Tento typ problému může odpovídat modelu grafu, kde vrcholy tvoří stanice a každému vrcholu je přiřazeno kladné celé číslo, které reprezentuje kanál. Každá dvojice blízkých stanic je spojena odpovídající hranou.

### 5.1 Definice rádiových ohodnocení

Rádiová ohodnocení souvisejí se vzdálenostmi v grafu. Necht' graf  $G$  je souvislý graf. Definici vzdálenosti  $d(u, v)$  a diametr  $diam(G)$  grafu  $G$  jsme uvedli v kapitole 2.2, proto přistoupíme k následujícím definicím rádiového ohodnocení.

**Definice 33 (Rádiové ohodnocení)** [2] *Rádiové ohodnocení (také multilevel ohodnocení) grafu  $G$ , je prosté zobrazení  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$  takové, že platí nerovnost  $|f(u) - f(v)| \geq diam(G) - d(u, v) + 1$  pro každou dvojici různých vrcholů  $u, v$ .*

Například pro sousední vrcholy  $u$  a  $v$ , tedy se vzdáleností  $d(u, v) = 1$ , platí  $|f(u) - f(v)| \geq diam(G)$ . Takže například pro hvězdu, kde  $diam(S_n) = 2$ , musí platit  $|f(u) - f(v)| \geq 2$  pro dva sousední vrcholy  $u$  a  $v$ . Z toho plyne, že rozdíl ohodnocení mezi středem hvězdy a listem musí být alespoň 2, proto se středu hvězdy přiřazuje číslo 1 a listům alespoň o 2 větší, tj. čísla  $3, 4, \dots, n$  navzájem různá, protože rádiové ohodnocení je prostým zobrazením.

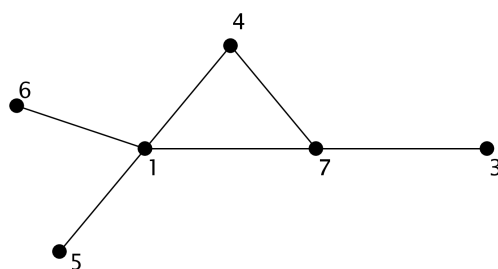
**Definice 34 (Rozpětí)** [19] *Rozpětí (z angličtiny „span“) rádiového ohodnocení  $f$  je maximální hodnota, kterou  $f$  dosáhne. Tedy  $rozpětí(f) = \max_{u \in V(G)} \{f(u)\}$ .*

Teoreticky rozpětí grafu  $G$  se může rovnat nekonečnu, protože není shora omezeno. Tento problém vyřeší následující definice 35.

**Definice 35 (Rádiové číslo)** [19] *Rádiové číslo grafu  $G$ , psané  $rn(G)$ , je nejmenší rozpětí všech možných rádiových ohodnocení grafu  $G$ :  $rn(G) = \min_f \{rozpětí(f)\}$ .*

Z definice 35 vyplývá, že nás zajímá to nejmenší možné rozpětí grafu  $G$ .

Na obrázku 46 vidíme příklad rádiového ohodnocení vybraného jednoduchého grafu  $G$ . Můžeme si povšimnout, že  $diam(G) = 3$ . Z toho plyne nerovnost  $|f(u) - f(v)| \geq 4 - d(u, v)$  a vidíme, že to je splněno pro každé dva různé vrcholy  $u$  a  $v$ . V tomto příkladu je rádiové číslo rovno 7. Můžeme se přesvědčit, že aby rozpětí grafu  $G$  bylo co nejmenší, graf  $G$  nelze očíslovat jinými čísly odpovídajícími rádiovému ohodnocení grafu  $G$ .

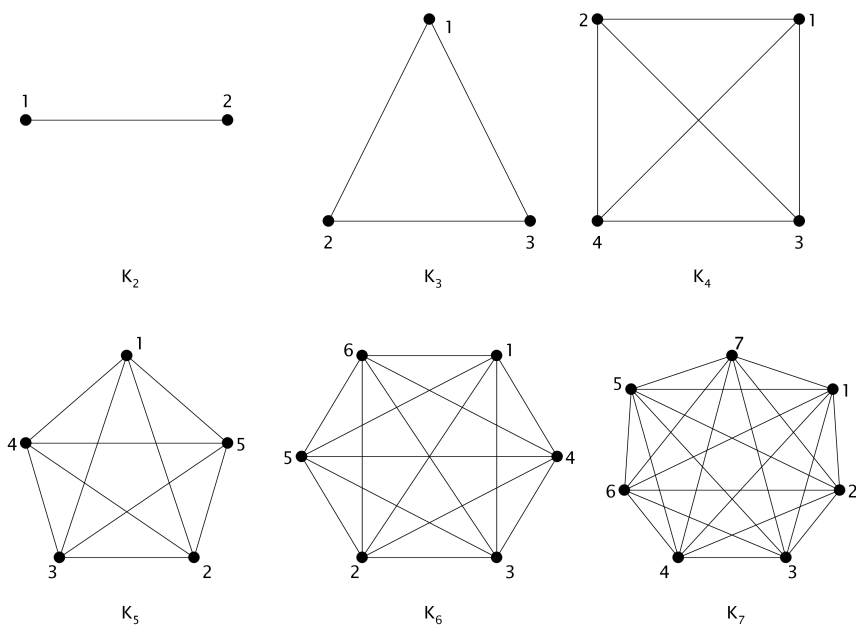


Obrázek 46: Příklad rádiového ohodnocení obecného grafu  $G$ .

## 5.2 Známé výsledky o rádiovém ohodnocení

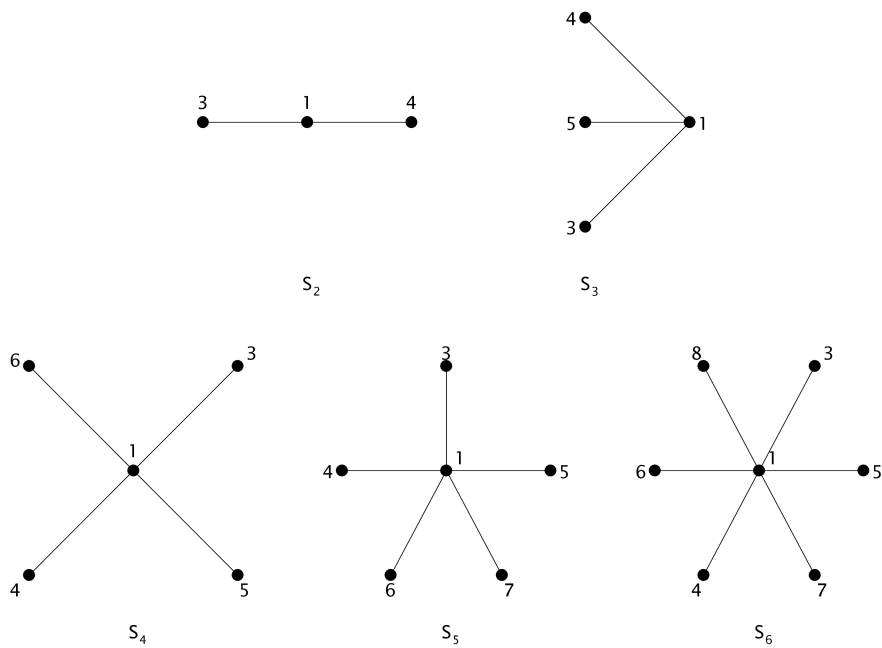
Uvedeme některé základní třídy grafů, pro které je jednoduché rádiové číslo určit (viz [18]). Výsledky jsou shrnuty ve větách 5.1, 5.2, 5.3 a 5.4.

**Věta 5.1** [18] *Pro úplný graf platí:  $rn(K_n) = n$  pro celá  $n \geq 2$  (viz obrázek 47).*



Obrázek 47: Příklady rádiových ohodnocení úplných grafů  $K_n$  pro  $2 \leq n \leq 7$ .

**Věta 5.2** [18] *Nechť graf  $G$  je hvězda  $S_n$ , potom  $rn(S_n) = n + 2$  pro celá  $n \geq 2$  (viz obrázek 48).*

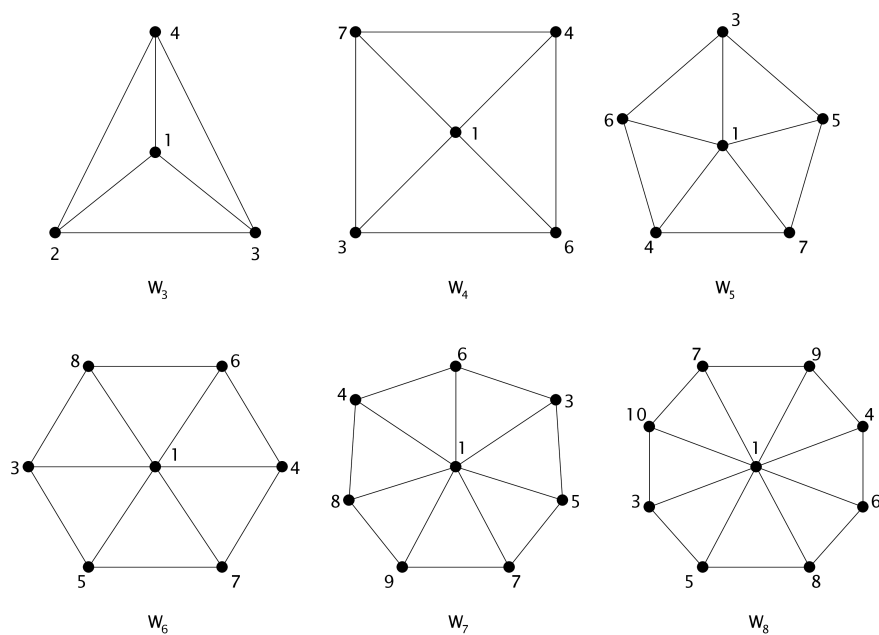


Obrázek 48: Příklady rádiových ohodnocení hvězd  $S_n$  pro  $2 \leq n \leq 6$ .

**Věta 5.3** [18] *Rádiové číslo kolového grafu s  $n$  vrcholy ( $W_n$ ) pro celá  $n \geq 3$  je:*

$$rn(W_n) = \begin{cases} 4 & \text{jestliže } n = 3 \\ 7 & \text{jestliže } n = 4 \\ n + 2 & \text{jestliže } n \geq 5 \end{cases}$$

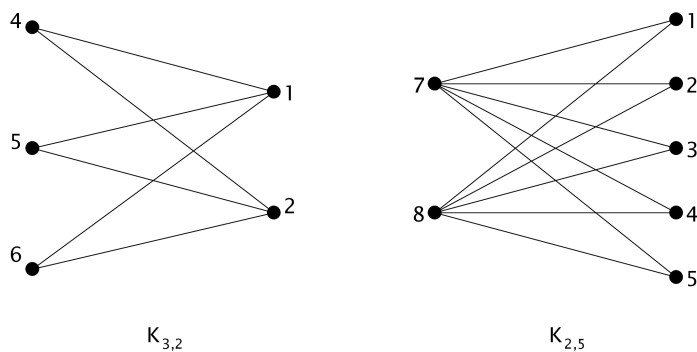
Příklad rádiových ohodnocení kolových grafů je na obrázku 49.



Obrázek 49: Příklady rádiových ohodnocení kolových grafů  $W_n$  pro  $3 \leq n \leq 8$ .

**Věta 5.4** [18] *V úplném bipartitním grafu  $K_{m,n}$  je rádiové číslo  $rn(K_{m,n})$  rovno  $m + n + 1$  bez újmy na obecnosti pro celá  $m \geq 1$  a  $n \geq 2$ .*

Příklad rádiového ohodnocení úplného bipartitního grafu je na obrázku 50.



Obrázek 50: Příklady rádiových ohodnocení úplných bipartitních grafů  $K_{3,2}$  a  $K_{2,5}$ .

Použití rádiových ohodnocení v praxi si ukážeme v aplikacích pro bezdrátové sítě. Budeme se zabývat grafy typu cesta a cyklus.

### 5.2.1 Cesta

Vladoi (viz [18]) vytvořil program, který generoval všechna možná rádiová ohodnocení pro grafy typu cesta na  $n$  vrcholech do  $n = 12$ . Všiml si zákonitosti, kterou se řídí rádiová

ohodnocení cesty. Tento výsledek dokázal a publikoval v článku [18], my ho uvádíme ve větě 5.5.

**Věta 5.5** *Pro rádiové číslo cesty  $P_n$  na  $n$  vrcholech platí:*

$$rn(P_n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} - n + \frac{7}{2} & \text{jestliže } n > 3 \text{ je liché,} \\ \frac{n^2}{2} - n + 2 & \text{jestliže } n \geq 2 \text{ je sudé,} \\ rn(P_3) = rn(S_2) = 4 & \text{jestliže } n = 3. \end{cases}$$

### 5.2.2 Cyklus

Pomocí počítače Vladii (viz [18]) zjistil následující výsledky rádiového čísla pro graf typu cyklus.

Pozorováním Vladii vypátral, že určení rádiového čísla cyklů lze rozdělit na čtyři případy ( $n \bmod 4$ ), tyto zmiňujeme ve větě 5.6, kterou Vladii dokázal.

**Věta 5.6** *Rádiové číslo pro cyklus na  $n \in \mathbb{Z}^+$  vrcholech je:*

$$rn(C_n) = \begin{cases} \frac{n^2}{8} + \frac{3n}{4} - 1 & \text{pro } 0 \equiv n \pmod{4}, \text{ tedy } n = 4k, \\ \frac{n^2}{8} + \frac{n}{4} + \frac{5}{8} & \text{pro } 1 \equiv n \pmod{4}, \text{ tedy } n = 4k + 1, \\ \frac{n^2}{8} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & \text{pro } 2 \equiv n \pmod{4}, \text{ tedy } n = 4k + 2, \\ \frac{n^2}{8} + \frac{n}{2} + \frac{3}{8} & \text{pro } 3 \equiv n \pmod{4}, \text{ tedy } n = 4k + 3. \end{cases}$$

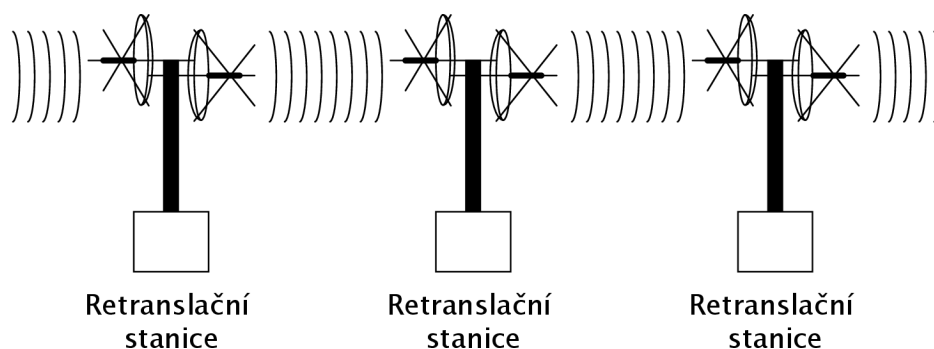
## 5.3 Aplikace

V této podkapitole představíme aplikace rádiových ohodnocení v oblasti simulací efektivity rádiové sítě (viz [18]).

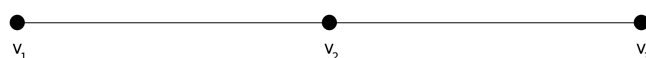
### 5.3.1 Simulace efektivity rádiové sítě

Simulace je napodobením skutečného jevu, stavu nebo procesu. Může být použita v mnoha souvislostech včetně přírodních nebo lidských systémů s cílem získat přehled o jejich fungování. Další souvislosti obsahují simulace technologií pro výkonovou optimalizaci, bezpečnostní inženýrství, testování, trénování nebo jiné obory činnosti.

Zmíníme [18] simulaci rádiové sítě pro graf typu cesta a pro graf typu cyklus.



Obrázek 51: Interpretace grafu typu cesta - rádiový přenos.

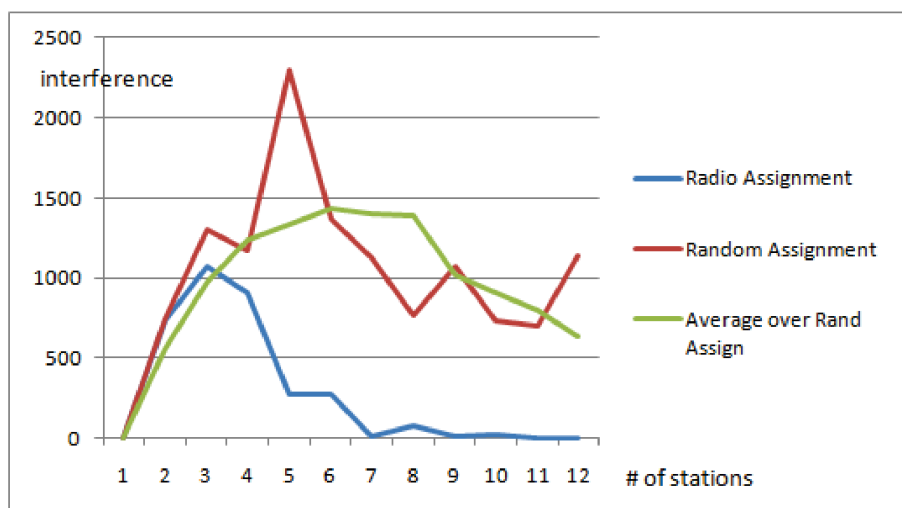


Obrázek 52: Interpretace grafu typu cesta - v teorii grafů.

Začneme [18] grafem typu cesta, který lze zobrazit přímou silnicí z bodu A do bodu B, na níž se různá mobilní telefonní vysílací zařízení snaží pokrýt stejnou oblast (viz obrázky 51 a 52). Simulace pro 1000 vysílání používající cestu přinesla následující výsledky (viz obrázky 53 a 54). Rádiové ohodnocení pro graf typu cesta nabízí daleko lepší komunikaci pro více než tři stanice. Rádiové sítě s méně než čtyřmi vysílači se mohou navzájem ovlivňovat (interferovat). Avšak pro sítě s více než čtyřmi vysílači proces rádiového ohodnocení umožňuje lepší a dokonalejší komunikaci mezi stanicemi. Matematický model je velmi přesný v předpovídání nejefektivnější metody vysílání. Sít sestavená pomocí rádiových čísel nemá prakticky žádnou interferenci.

Chain	1000		
number of vertexes	Radio Assignment	Random Assignment	Average over Rand Assign
1	0	0	0
2	733	750	556.8333333
3	1077	1297	978.3666667
4	913	1171	1232.7
5	280	2292	1331.7
6	272	1365	1436.366667
7	18	1132	1398.966667
8	79	762	1385.033333
9	9	1070	1019.6
10	21	737	905.5333333
11	2	700	797.9666667
12	3	1140	640.6333333

Obrázek 53: Tabulka cesty pro 1000 vysílání.



Obrázek 54: Cesta pro 1000 vysílání.

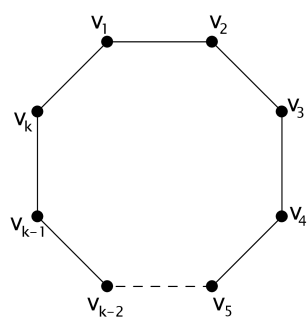
Druhá simulace [18] se týká grafů typu cyklus. Představme si stovky satelitů, které krouží kolem Země. Většina z nich využívá technologii rádiového vysílání. Jeden z nejznámějších takových systémů je globální polohový systém.

Globální polohový systém (GPS) je severoamerický globální satelitní navigační systém. Poskytuje spolehlivé umístování, navigaci a načasování služeb uživatelům po celé zeměkouli nepřetržitě, v jakémkoliv počasí, v noci nebo ve dne, kdekoliv blízko Země s volným výhledem na čtyři nebo více GPS satelitů.

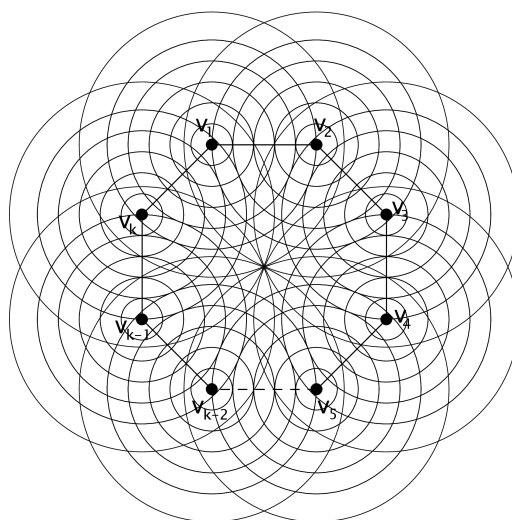
Satelity GPS vysílají signály z vesmíru, které používají k poskytování trojrozměrných signálů (zeměpisná šířka, délka a výška) a přesného času.

GPS se stalo celosvětově užívaným prostředkem pro navigaci a užitečnou pomůckou pro mapování, zeměměřictví, komerční a vědecké účely, sledování, a koníčky jako například geocaching. Také přesný referenční čas je používán v mnoha aplikacích včetně vědeckých studií zemětřesení a jako zdroj časové synchronizace pro protokoly mobilních sítí. GPS se stalo základem celosvětových transportních systémů, poskytující navigaci pro letecké, pozemní a námořní operace. GPS umožňuje každodenní aktivity, jako jsou bankovníctví, operace mobilních telefonů i kontrolu energetických sítí. Farmáři, geometři, geologové a nespočet dalších vykonávají svoji práci efektivněji, bezpečněji, ekonomičtěji a přesněji s využitím volných a otevřených GPS signálů. Proto účinná metoda komunikace, která minimalizuje interferenci, je nutná. Simulace bere v úvahu realistický model vysílacích stanic, které vysílají informace v soustředných vlnách, což je v rozporu s původním argumentem v našem modelu teorie grafů, že vlny se pohybují pouze podél hran. Jinými slovy, simulace odpovídá euklidovské vzdálenosti mezi vrcholy, nejen interferenci podél hran (viz obrázek 55).





Matematická  
reprezentace vysílání



Simulace  
reprezentace vysílání

Obrázek 55: Reprezentace v teorii grafů a simulační reprezentace.

## 6 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vyhledat a popsat a na příkladech ukázat aplikace grafových ohodnocení. V práci jsem se zabýval graciózním, magickým a rádiovým ohodnocením a popsal jsem jejich vybrané aplikace.

Pro každý vybraný typ ohodnocení jsem vyhledal zajímavé významné výsledky. Mým úkolem bylo najít potřebné zdroje informací a použít je tak, aby zapadaly do osnovy této práce. V jedné práci jsem shromáždil informace o různých aplikacích různých grafových ohodnocení.

Mohu říci, že jsem částečně navázal na existující práce týkající se magických a graciózních ohodnocení, jejichž spoluautory jsou členové Katedry aplikované matematiky. Dále jsem čerpal z doporučené literatury, hlavně z přehledového článku J.A. Galliana a z odborných článků či z knižních publikací a časopisů dostupných v knihovnách anebo v pdf formátu na internetu.

Popsal jsem a na příkladech ukázal tyto aplikace graciózních ohodnocení. Například pro rozklady grafů existuje pro graf s  $m$  hranami cyklický  $H$ -rozklad grafu  $K_{2m+1}$  právě tehdy, když  $H$  má  $\rho$ -ohodnocení.

Popsal jsem souvislost graciózních ohodnocení s konstrukcí perfektního systému diferenčních množin (PSDS), ten může mít  $m$  komponent, velikosti  $n$  a číslování začínající od  $c$ . Značí se  $(m, n, c)$ . Například PSDS  $(m, n, 1)$  odpovídá gracióznímu ohodnocení grafu  $mK_n$ .

Zmínil jsem Golombovo pravítko v souvislosti s  $c$ -graciózním ohodnocením.

V kapitole magických ohodnocení jsem se zabýval aplikacemi těchto magických ohodnocení: *distančně magické*, *distančně antimagické* a *hendikepové* ohodnocení grafu. Jako aplikace těchto ohodnocení jsem uvedl rozpis zápasů neúplných sportovních turnajů.

V kapitole rádiových ohodnocení jsem se zabýval pojmem rádiové číslo grafu. Uvedl jsem příklady rádiových ohodnocení některých základních tříd jednoduchých grafů. Dále jako aplikace jsem uvedl simulaci efektivity rádiové sítě pro cestu a pro cyklus. Zabýval jsem se zde rušením signálů vysílacích stanic v závislosti na jejich počtu.

Vyhledání, příprava a analýza podkladů pro tuto práci a dále jejich tvořivé zpracování do struktury této práce pro mne znamenala velké rozšíření znalostí získaných při studiu teorie grafů o zajímavá ohodnocení grafů a jejich aplikace v různých oblastech lidské činnosti.

Přínosem pro mě byly i nabyté zkušenosti při hledání zdrojů informací. Vzhledem k tomu, že většina zahraničních zdrojů je k dispozici pouze v anglickém jazyce, rozšířil jsem si i slovní zásobu o řadu speciálních technických výrazů, které jsou v praktických aplikacích hojně využívány.

Protože grafových ohodnocení existuje celá řada, nebylo v možnostech jedné bakalářské práce zabývat se všemi možnými ohodnoceními a popsat všechny možné aplikace, takže jistě existuje mnoho prostoru k tomu, aby se v hledání dalších aplikací pokračovalo v dalších pracích.

## Literatura

- [1] WEST, D.B. *Introduction to Graph Theory*, Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ, 2001. ISBN 0-13-014400-2.
- [2] GALLIAN, J.A. *Dynamic Survey of Graph Labeling - The Electronic Journal of Combinatorics*, Twenty-first edition, Department of Mathematics and Statistics, University of Minnesota Duluth, Duluth, Minnesota 55812, U.S.A., 2018.
- [3] ROSA, A. *On certain valuations of the vertices of a graph.*, Internat. Symposium, Rome, červen 1966.
- [4] ESHGHI, K. *Introduction to Graceful Graphs*, 2002.
- [5] KOVÁŘOVÁ, T. *Ph.D. Thesis: Spanning Tree Factorizations of Complete Graphs*, 2004.
- [6] EL-ZANATI, S.I. - VANDED EYNDEN, C. *On Rosa-type labelings and cyclic graph decompositions*, Department of Mathematics, Illinois State University, Normal, IL 61790-4520 USA, 2009.
- [7] [online]. Dostupné z: [https://web.archive.org/web/20120729224449/http://www.eleves.ens.fr/home/wfang/gtv/index\\_en.html](https://web.archive.org/web/20120729224449/http://www.eleves.ens.fr/home/wfang/gtv/index_en.html). [cit. 2019-04-20].
- [8] BLOOM, G. S. - GOLOMB, S. W. *Applications of numbered undirected graphs*, Proc. IEEE 65, duben 1977.
- [9] SHEPANIK, A. - FRONČEK, D. *Graph Labelings and Tournament Scheduling*, Applied and Computational Mathematics, University of Minnesota M.S. thesis. květen 2015.
- [10] RUPNOW, R. *A survey of distance magic graphs*, Master's report, Michigan Technological University, 2014.
- [11] ARUMUGAM, S. - FRONČEK, D. - KAMATCHI, N. *Distance magic graphs - A Survey*, J. Indones. Math. Soc. Special Edition, 2011.
- [12] [online]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Round-robin\\_tournament](https://en.wikipedia.org/wiki/Round-robin_tournament). [cit. 2019-04-20].
- [13] [online]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Komplement\\_grafu](https://cs.wikipedia.org/wiki/Komplement_grafu). [cit. 2019-04-20].
- [14] [online]. Dostupné z: <http://blogs.distributed.net/2014/02/>. [cit. 2019-04-20].
- [15] Kovář, P. *Teorie grafů*, 2018.

- [16] KANG, S. M. - NAZEER, S. - NAZEER, W. - RAFIQ, A. *Multilevel Distance Labeling for Generalized Petersen  $P(4k + 2, 2)$  related Graphs*, Department of Mathematics and RINS, Jinju, Korea, 2014.
- [17] MILLER, M. - RODGER, C. - SIMANJUNTAK, R. *Distance magic labelings of graphs*, The University of Newcastle, 2003.
- [18] VLADOI, A. *Wireless networks: A labeling problem*, Bard College, New York, 2010.
- [19] MARINESCU-GHEMECI, R. - MIHAI, G. - TOMESCU, I. *Radio number of uniform subdivisions of the wheel*, University of Bucharest, Bucharest, Romania, 2010.
- [20] TRENKLER, M. *Magic graphs and their generalization*, 2016.
- [21] FRONČEK, D. - SHEPANIK, A. - KOVÁŘ, P. - KRAVČENKO, M. - SILBER, A. - KOVÁŘOVÁ, T. - KRAJC, B. *On regular handicap graphs of even order*, USA, CZ, 2017.
- [22] KOVÁŘOVÁ, T. - KOVÁŘ, P. - KRAJC, B. *Handicap labelings of regular graphs*, Seminář diskrétní matematiky DiMaS, listopad 2012.